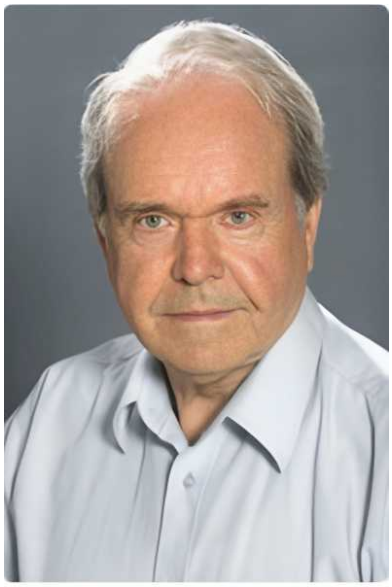
Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 2, С. 129–145

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 85-ЛЕТИЮ ЕВГЕНИЯ МИХАЙЛОВИЧА СЕМЁНОВА



В августе 2025 г. исполнилось 85 лет видному российскому математику, доктору физико-математических наук, профессору Воронежского государственного университета Евгению Михайловичу Семёнову.

Евгений Михайлович родился 22 августа 1940 г. в г. Грозном.

Его отец — Михаил Кузьмич Семёнов (1913–1941) — был заместителем командира пограничной заставы на румынской границе. Он погиб на фронте в возрасте 27-ми лет. Мать Е. М. Семёнова — Нина Капитоновна Витченко (1906–1976) — после переезда в г. Воронеж работала ассистентом в Воронежском госуниверситете.

Вся жизнь Евгения Михайловича связана с Воронежским университетом. Годы его студенчества (1957–1962 гг.) совпали с расцветом Воронежской математической школы. Среди его преподавателей были такие известные ученые, как Ю. Г. Борисович, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, А. И. Медведев, Б. С. Митягин, В. М. Тихомиров, В. И. Соболев, А. С. Шварц.

Математическое дарование Е. М. Семёнова проявилось уже в студенческие годы. Под влиянием С. Г. Крейна и М. А. Красносельского он увлекается функциональным анализом и получает первые самостоятельные результаты.

Начало научной деятельности Е. М. Семёнова (конец 50-х — начало 60-х годов) по времени совпало с бурным развитием нового раздела функционального анализа — теории интерполяции операторов. Благодаря, прежде всего, работам С. Г. Крейна, одним из центров становления этого перспективного направления стал Воронеж.

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — две банаховы пары (так называется пара банаховых пространств, линейно и непрерывно вложенных в некоторое отделимое линейное топологическое пространство). Предположим, что X и Y — такие банаховы пространства, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$. Тогда говорят, что тройка (X_0, X_1, X) интерполяционна относительно тройки (Y_0, Y_1, Y), если любой линейный оператор $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$, ограниченный из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, ограниченно действует из X в Y. В частности, если $X_i = Y_i$ $(i = 0, 1)$ и $X = Y$, то X называется интерполяционным между X_0 и X_1.

Первая интерполяционная теорема, сформулированная в терминах билинейных форм, была доказана в 1927 г. М. Риссом [1]. В 1938 г. Г. О. Торин привел совершенно новое доказательство этого результата, устранив имевшиеся ограничения и придав ему операторный вид [2]. Теорема Рисса — Торина утверждает следующее: если $1 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant \infty$,

$1 \leqslant q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$, $q^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$, то тройка (L_{p_0}, L_{p_1}, L_p) интерполяционна относительно тройки (L_{q_0}, L_{q_1}, L_q) (функции этих пространств определены на произвольном пространстве с мерой).

Другие важные теоремы, приведшие в результате к созданию теории интерполяции операторов, были получены В. Орличем в 1934 г. [3] и Й. Марцинкевичем в 1939 г. [4]. Заметим, что последняя из них появилась первоначально без доказательства, которое было дано А. Зигмундом позднее в 1956 г. [5].

Вышеупомянутые результаты относились к изучению операторов, действующих либо в L_p-пространствах, либо близких к ним. В конце 50-х — начале 60-х годов, как уже говорилось, было начато создание абстрактной теории интерполяции. Основная роль при этом принадлежала исследованиям Ж.-Л. Лионса, А. П. Кальдерона и С. Г. Крейна. Кроме того, существенный вклад в разработку теории внесли Н. Ароншайн, Э. Гальярдо и Я. Петре.

В работах С. Г. Крейна и Ю. И. Петунина была развита теория шкал банаховых пространств, изучались их интерполяционные свойства. Неудивительно поэтому, что первые работы Е. М. Семёнова, ученика С. Г. Крейна, были посвящены именно этой тематике.

Семейство банаховых пространств $\{E_u\}$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ называется шкалой, если

1) при $v > u$ пространство E_v плотно вложено в E_u и $\|x\|_{E_u} \leqslant C(u,v)\|x\|_{E_v}$ $(x \in E_v)$;

2) существует функция $C(u,v,w)$, конечная при всех $0 \leqslant u < v < w \leqslant 1$, такая, что

$$\|x\|_{E_v} \leqslant C(u,v,w)\,\|x\|_{E_u}^{\frac{w-v}{w-u}}\,\|x\|_{E_w}^{\frac{v-u}{w-u}} \quad (x \in E_w).$$

В частности, если $C(u,v) = C(u,v,w) \equiv 1$, то шкала $\{E_u\}$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ называется нормальной. Если, кроме того, функция $\varphi_x(u) = \|x\|_{E_u}$ $(x \in E_1)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то нормальная шкала $\{E_u\}$ называется непрерывной нормальной шкалой, соединяющей пространства E_0 и E_1. Если F_0 и F_1 — два банаховых пространства, $F_1 \subset F_0$ и $\|x\|_{F_0} \leqslant \|x\|_{F_1}$ $(x \in F_1)$, то существует непрерывная нормальная шкала пространств $\{E_u^{\max}\}$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ (называемая максимальной), которая обладает следующими свойствами:

1) $E_0^{\max} = F_0$;

2) $F_1 \subset E_1^{\max}$ и $\|x\|_{E_1^{\max}} \leqslant \|x\|_{F_1}$ $(x \in F_1)$;

3) если $\{E_u\}$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ — непрерывная шкала такая, что для $i = 0,1$ $F_i \subset E_i$ и $\|x\|_{E_i} \leqslant \|x\|_{F_i}$ $(x \in F_i)$, то справедливо неравенство

$$\|x\|_{E_u} \leqslant \|x\|_{E_u^{\max}} \quad (x \in F_1,\ 0 \leqslant u \leqslant 1).$$

Важным свойством максимальной нормальной шкалы является то, что она обладает интерполяционным свойством по отношению ко всякой нормальной шкале.

Интерес Е. М. Семёнова к теории шкал был первоначально связан с изучением интерполяционных свойств шкал банаховых пространств измеримых функций. Так, в его совместной работе с С. Г. Крейном [6] рассматривается семейство пространств функций, измеримых на отрезке $[0,1]$, с нормами

$$\|x\|_{\Lambda(u)} = \int_0^\infty n_x^{1-u}(z)\,dz \quad (0 \leqslant u \leqslant 1),$$

где здесь и далее

$$n_x(z) = \operatorname{mes}\{t : |x(t)| > z\} \quad (z > 0).$$

Эти пространства были введены Г. Г. Лоренцем [7], в связи с чем они носят его имя. В работе [6] получен ряд важных новых свойств пространств Лоренца. Так, например, показано, что ограниченность произвольной полунормы на таком пространстве следует из ее ограниченности на множестве характеристических функций. Используя это, авторы доказали ряд интерполяционных утверждений, в частности, то, что пространства Лоренца образуют максимальную шкалу пространств, соединяющую пространства L_1 и L_∞. В работе [8] Е. М. Семёнов вводит новую шкалу пространств $M_0(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$. Доказано, что $M_0(u)^* = \Lambda(u)$, изучаются их интерполяционные свойства.

Итогом этих и некоторых других исследований Е. М. Семёнова стала кандидатская диссертация «Шкалы банаховых пространств, соединяющие пространства L_1 и L_∞», успешно защищенная им в 1964 г. сразу после окончания аспирантуры в Воронежском госуниверситете.

С комплексным методом интерполяции, введенным А. П. Кальдероном [9], тесно связана работа [10], написанная Е. М. Семёновым совместно с С. Г. Крейном и Ю. И. Петуниным. Шкала банаховых идеальных пространств измеримых функций $\{E_u\}$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ на некотором пространстве с мерой называется гипершкалой, если

$$\left\| |x_0|^\mu \, |x_1|^\nu \right\|_{E_v} \leqslant \|x_0\|_{E_u}^\mu \, \|x_1\|_{E_w}^\nu,$$

где $x_0, x_1 \in E_1$, $0 \leqslant u < v < w \leqslant 1$, $\mu = (w-v)/(w-u)$, $\nu = (v-u)/(w-u)$. В работе [10] доказано, что среди всех гипершкал, соединяющих два пространства, существует максимальная. В частности, максимальной гипершкалой, соединяющей произвольное банахово идеальное пространство E с пространством L_∞, является семейство $\{E_u\}$ с нормами

$$\|x\|_{E_u} = \left\| |x|^{\frac{1}{1-u}} \right\|_E^{1-u} \quad (0 \leqslant u \leqslant 1).$$

Показано, что максимальную гипершкалу образуют пространства комплексного метода $[E_0, E_1]_u$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, построенные по произвольной паре банаховых идеальных пространств (E_0, E_1).

Одновременно Е. М. Семёнов все бóльшее внимание уделяет изучению банаховых пространств измеримых функций в более широком смысле, а не только в связи с теорией интерполяции.

К тому времени уже достаточно интенсивно изучались банаховы идеальные пространства функций [11]. Эти пространства имеют следующее свойство: если $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ и $y(t) \in E$, то $x(t) \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

В работе [12], опубликованной в 1964 г., Е. М. Семёнов вводит важное понятие симметричного пространства. Так называется банахово идеальное пространство функций, удовлетворяющее следующему требованию: если $y(t) \in E$ и функции $|y(t)|$ и $|x(t)|$ равноизмеримы (т. е. $n_x(z) = n_y(z)$ $(z > 0)$), то $x(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$. Заметим, что ранее симметричные пространства с дополнительным предположением о полунепрерывности нормы под названием перестановочно инвариантных были введены Г. Г. Лоренцем [13].

Важные примеры симметричных пространств — пространства L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, их обобщение — пространства Орлича, а также степенные пространства Лоренца и Марцинкевича, впервые появившиеся в работе [7] (см. также [14]). В работе [12] Е. М. Семёнов определяет пространства Лоренца и Марцинкевича, построенные по произвольной неотрицательной возрастающей вогнутой функции, и устанавливает ряд их свойств. Здесь вводится важное в теории симметричных пространств понятие фундаментальной функции: если E — симметричное пространство функций, измеримых на $[0, 1]$, то его фундаментальной функцией называется функция $\varphi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ ($\chi_{(0,t)}$ — характеристическая функция интервала $(0, t)$).

Показано, что пространства Лоренца $\Lambda(\tilde{\varphi})$ ($\tilde{\varphi}(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта $\varphi(t)$) и Марцинкевича $M(\psi)$, $\psi(t) = t/\varphi(t)$ являются, соответственно, минимальным и максимальным пространствами в классе всех симметричных пространств с фундаментальной функцией φ. Это означает, что для любого симметричного пространства E из этого класса выполнено: $\Lambda(\tilde{\varphi}) \subset E \subset M(\psi)$, $\|x\|_{M(\psi)} \leqslant \|x\|_E$ ($x \in E$) и $\|x\|_E \leqslant \|x\|_{\Lambda(\tilde{\varphi})}$ ($x \in \Lambda(\tilde{\varphi})$).

Кроме того, пространства L_∞ и L_1 — минимальное и максимальное пространства в классе всех симметричных пространств функций на $[0,1]$, т. е. имеют место непрерывные вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$.

В дальнейшем понятие симметричного пространства оказалось очень плодотворным при изучении как интерполяционных свойств операторов, так и геометрии функциональных пространств. Выяснилось, что многие задачи находят свое наиболее полное или даже окончательное решение именно в этом классе пространств.

В 1967 г. Е. М. Семёнов стал одним из первых в стране лауреатом премии Ленинского комсомола. В 1968 г. в возрасте 28 лет он успешно защищает докторскую диссертацию «Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах».

Одно из направлений работы Е. М. Семёнова в конце 60-х годов было связано со знаменитой теоремой Марцинкевича [4], которая утверждает следующее. Пусть квазилинейный оператор A действует из L_{p_i} в пространство измеримых конечных почти всюду функций $S(V, d\nu)$ на некотором пространстве с мерой и

$$\tau \cdot \nu\left\{v \in V : |Ax(v)| > \tau\right\}^{\frac{1}{q_i}} \leqslant M_i \|x\|_{L_{p_i}} \quad (i = 0, 1)$$

для всех $x = x(t) \in L_{p_i}$ и $\tau > 0$. Если $1 \leqslant p_i \leqslant q_i < \infty$ $(i = 0, 1)$, то оператор A действует из L_p в L_q, где $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$ и $q^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$ $(0 < \theta < 1)$.

Эта теорема породила большое количество исследований, связанных с ее обобщением и уточнением. Один из наиболее интересных и полных результатов был получен в совместной работе С. Г. Крейна и Е. М. Семёнова [15] (первоначальный вариант в случае степенных функций был доказан Е. М. Семёновым в [16]). Сформулируем его.

Пусть функции $\kappa(t)$ и $\delta(t)$ измеримы и неотрицательны, $\delta([0,1]) \subset [0,1]$. Если E — симметричное пространство на $[0,1]$, то через $E_{\kappa,\delta}$ обозначим множество всех функций $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_{\kappa,\delta} = \left\|x^{**}(\delta(t))\kappa(t)\right\|_E < \infty,$$

где $x^{**}(s) = 1/s \int_0^s x^*(u)\,du$, а $x^*(u)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(u)|$. Пусть, кроме того, φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 — неотрицательные вогнутые функции такие, что область значений $\psi_0(s)/\psi_1(s)$ содержит область значений $\varphi_0(s)/\varphi_1(s)$ и

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\ln \sup\limits_s \frac{\varphi_1(ts)}{\varphi_1(s)}}{\ln t} < \alpha_E \leqslant \beta_E < \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \sup\limits_s \frac{\varphi_0(ts)}{\varphi_0(s)}}{\ln t},$$

где α_E и β_E — индексы Бойда симметричного пространства E [17].

Если линейный оператор A непрерывен из $\Lambda(\varphi_i)$ в $M(\psi_i)$, то A непрерывен из E в $E_{\kappa,\delta}$, где $\delta(t)$ — измеримое решение уравнения

$$\frac{\psi_0(\delta(t))}{\psi_1(\delta(t))} = \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)} \quad \text{и} \quad \kappa(t) = \frac{\psi_0(\delta(t))}{\varphi_0(t)}.$$

Заметим, что при весьма общих предположениях построенное пространство $E_{\kappa,\delta}$ оптимально (т. е. не может быть уменьшено).

Вопросы оптимальности интересовали Е. М. Семёнова и в связи с другим основополагающим в теории интерполяции результатом — теоремой Рисса — Торина. А. П. Кальдерон [18], а также В. А. Дикарев и В. И. Мацаев [19] независимо доказали, что в случае $p_i \leqslant q_i$ $(i = 0, 1)$ («нижний треугольник») эту теорему можно усилить. Аналогичный вопрос для «верхнего треугольника» (т. е. случая $p_i > q_i$ $(i = 0, 1)$) оставался открытым до 1981 г., когда А. А. Дмитриев и Е. М. Семёнов доказали оптимальность теоремы Рисса — Торина в этой ситуации [20]. С классическими интерполяционными теоремами тесно связано важное свойство устойчивости вещественного метода интерполяции, рассматривавшееся Е. М. Семёновым гораздо позднее в работе [21].

Еще в начале 60-х годов Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженес [22] поставили вопрос о том, будет ли интерполяционным между $C(\bar{D})$ и $C^n(\bar{D})$ пространство $C^k(\bar{D})$ $(0 < k < n)$ (через $C^l(\bar{D})$ обозначается пространство l раз непрерывно-дифференцируемых функций на замыкании открытого множества $D \subset \mathbb{R}^s$ с естественной нормой). Аналогичный вопрос был задан также и для пространств Соболева $W_1^l(\bar{D})$. Задачи эти достаточно долго не поддавались решению даже в случае троек (C, C^2, C^1) функций на отрезке и (L_1, W_1^2, W_1^1) на окружности. Отрицательный ответ на этот вопрос (наряду с рядом других результатов) был дан в двух совместных работах Б. С. Митягина и Е. М. Семёнова [23] и [24]. Они показали, что пространство $C^k(\bar{D})$ не является интерполяционным между $C(\bar{D})$ и $C^n(\bar{D})$, а $W_1^k(\bar{D})$ — между $L_1(\bar{D})$ и $W_1^n(\bar{D})$ $(0 < k < n)$.

Еще раньше Е. М. Семёнов заинтересовался другой проблемой, относящейся к пространствам гладких функций — интерполяцией операторов, ограниченных в пространствах Липшица. Пусть $\varphi(t)$ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$. Через $\operatorname{Lip}\varphi$ обозначим множество всех функций $x = x(t)$, для которых существует $C > 0$ такое, что для всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$|x(s) - x(t)| \leqslant C\varphi(t - s).$$

В работе [25] Е. М. Семёнов нашел точную интерполяционную теорему для пространств $\operatorname{Lip}\varphi$. Заметим, что независимо и на другом пути аналогичный результат был доказан Я. Петре [26].

В 1966 г. А. П. Кальдерон получил необходимые и достаточные условия, при выполнении которых банахово пространство измеримых функций интерполяционно между пространствами L_1 и L_∞ [18] (близкое утверждение независимо было доказано Б. С. Митягиным [27]). Вскоре в связи с этим результатом появилась гипотеза о возможности описания интерполяционных пространств с помощью так называемого $\mathscr{K}$-функционала Петре [28]. Он определяется следующим образом: если (X_0, X_1) — банахова пара, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$, то

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\left\{\|x_0\|_{X_0} + t\,\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_i \in X_i,\ i = 0, 1\right\}.$$

Гипотеза, привлекшая внимание многих математиков, заключалась в следующем. Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — две банаховы пары. Для того, чтобы тройка (X_0, X_1, X) была интерполяционна относительно тройки (Y_0, Y_1, Y), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой константы $C > 0$ и произвольных $x \in X$, $y \in Y_0 + Y_1$ из неравенства $\mathscr{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leqslant \mathscr{K}(t, x; X_0, X_1)$ следовало $y \in Y$ и $\|y\|_Y \leqslant C\|x\|_X$.

Одной из первых статей, посвященных проверке этого утверждения, была совместная работа Е. М. Семёнова и его ученика А. А. Седаева [29]. Им удалось получить два в определенном смысле разнонаправленных результата, ставших впоследствии мотивацией и основой для многих дальнейших исследований.

Первый из них подтверждает гипотезу в случае весовых L_1-пространств $L_{1,a}$, $\|x\|_{L_{1,a}} = \int_V |x(v)|a(t)\,d\mu(v)$ $(a(v) \geqslant 0)$. А именно, если банахово идеальное пространство E интерполяционно между пространствами $L_{1,a}$ и $L_{1,b}$, то из неравенства $\mathscr{K}(t,y;L_{1,a},L_{1,b}) \leqslant \mathscr{K}(t,x;L_{1,a},L_{1,b})$ $(t>0)$ и того, что $x \in E$, следует $y \in E$ и $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$. Это утверждение, известное как теорема Седаева — Семёнова, остается до сих пор одним из наиболее используемым и цитируемым в теории интерполяции.

В то же время второй результат работы [29] показал, что даже в конечномерном случае аналогичное описание интерполяционных пространств может не иметь места. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, а $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ — вектор, полученный перестановкой $|x_1|, |x_2|$ и $|x_3|$ в убывающем порядке. Обозначим через E_0 и E_1 пространство $\mathbb{R}^3$, взятое с нормой $\|x\|_{E_0} = x_1^* + x_2^*$ и $\|x\|_{E_1} = x_1^*$, соответственно. Тогда существует пространство E, интерполяционное относительно пары (E_0, E_1), и векторы $a, b \in \mathbb{R}^3$ такие, что $\mathscr{K}(t,b;E_0,E_1) = \mathscr{K}(t,a;E_0,E_1)\,(t>0)$, но $\|b\|_E > \|a\|_E$.

В 1978 г. вышла первая в отечественной литературе монография по интерполяции операторов [30]. Авторы — С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин и Е. М. Семёнов — подвели в ней определенный итог развития этого раздела функционального анализа, наметили дальнейшие пути. Эта книга, заметно отличаясь от других монографий по теории интерполяции (прежде всего, книг Й. Берга и Й. Лефстрема [31] и Х. Трибеля [32]) как освещением, так и отбором материала, сыграла и продолжает играть важную роль в ее развитии. Она переведена на английский язык и издана в США.

В 1986 г. в очередном томе «Итогов науки и техники» был опубликован обзор по теории интерполяции операторов [33], в написании которого принял участие и Е. М. Семёнов (вместе с Ю. И. Брудным и С. Г. Крейном).

Значительное место в научной деятельности Е. М. Семёнова занимают работы по геометрии функциональных пространств. Круг его интересов в этой области очень широк, причем многие исследования были начаты именно благодаря его «пионерским» работам. Здесь, ни в коей мере не претендуя на полноту, мы упомянем лишь некоторые, наиболее характерные для его творчества результаты. При этом одной из главных черт исследований Евгения Михайловича является настойчивое стремление к получению окончательных, точных результатов (т. е. необходимых и достаточных условий, полного описания класса пространств с каким-либо характеристическим свойством и т. д.).

В работе [34] Е. М. Семёнов и его ученик М. Ш. Браверман обнаружили следующее новое характеристическое свойство пространств L_p в классе всех симметричных пространств. Пусть G_k — множество всевозможных наборов попарно непересекающихся подмножеств $e_1, e_2, \ldots, e_k$ положительной меры и $E(e_1, e_2, \ldots, e_k) = E(e)$ — подпространство в E, порожденное нормированными характеристическими функциями $\|\chi_{e_i}\|^{-1}\chi_{e_i}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Если для любого k пространства $E(e')$ и $E(e'')$ изометричны для любых $e', e'' \in G_k$, то $E \equiv L_p$ (т. е. изометрически).

Следствием этой теоремы является утверждение о том, что только в пространствах L_p канонические базисы всех подпространств $E(e)$ могут быть симметричными.

В совместных работах В. А. Родина и Е. М. Семёнова [35, 36] были обнаружены важные экстремальные свойства пространства, являющегося замыканием пространства L_∞ в пространстве Орлича L_M с $M(u) = \exp(u^2) - 1$. Обозначим это пространство, а также сопряженное к нему через G и G' соответственно. В частности, было доказано, что подпространство, порожденное системой функций Радемахера, дополняемо в симметричном пространстве E на $[0,1]$, если и только если имеют место вложения $G \subset E \subset G'$. В связи с этим в обзоре [37] Е. М. Семёновым была высказана гипотеза о том, что последнее условие необходимо и достаточно для того, чтобы в симметричном пространстве E су-

ществовало дополняемое гильбертово подпространство. Она привлекла внимание многих математиков и была подтверждена в работе французского математика И. Райно [38].

Работы В. А. Родина и Е. М. Семёнова получили продолжение в работах С. Я. Новикова, ученика Е. М. Семёнова, в которых рассматриваются свойства оператора вложения симметричных пространств на [0, 1] (см. [39, 40]). Там известная теорема Гротендика [41, 42] о строгой сингулярности канонического вложения пространства L_∞ в L_p, $p < \infty$, была распространена на произвольное симметричное пространство, отличное от L_∞.

В работе [43] исследовались подпространства пространств L_p и пространств Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$. Для формулировки одного из результатов нам потребуется следующая числовая характеристика подмножества A симметричного пространства E на $[0,1]$:

$$\eta_E(A) = \lim_{\tau\to 0} \sup_{x\in A,\, x\neq 0} \frac{\|x^*\chi_{[0,\tau]}\|_E}{\|x\|_E}.$$

Если теперь

$$\mathscr{S}(L_p) := \big\{\eta_{L_p}(H) : H \text{ — подпространство } L_p\big\},$$

то $\mathscr{S}(L_p) = \{0,1\}$ (состоит только из двух точек) при $1 \leqslant p < 2$ и $\mathscr{S}(L_p) = [0,1]$ (заполняет весь отрезок) при $2 \leqslant p < \infty$.

К изучению и применению характеристики η_E Е. М. Семёнов возвращался также гораздо позднее. В совместной работе [44] с еще одним своим учеником, С. В. Асташкиным, с помощью нее он изучает геометрические свойства пространств, второе двойственное (или ассоциированное) к которым несепарабельно. В частности, там показано, что в каждом несепарабельном симметричном пространстве E можно определить эквивалентную норму, относительно которой E содержит ненулевую функцию x, ортогональную его сепарабельной части E_0. Это означает, что $\|x\|_E \leqslant \|x+y\|_E$ для всех $y \in E_0$. Естественным продолжением явилась следующая работа [45] тех же авторов, в которой получена характеризация множества ортогональных элементов для пространств Орлича и Марцинкевича. Там же доказано, что всякое симметричное пространство, содержащее ненулевую функцию x, ортогональную его сепарабельной части, имеет асимптотически изометрическую копию пространства l_∞.

В совместной работе Е. М. Семёнова и Б. С. Цирельсона [46] была решена задача о малости операторных блоков в L_p, поставленная Б. С. Митягиным. А именно, было доказано, что для всех $1 < p < \infty$

$$\inf\big\{\|Q_e A Q_f\|_{L_p} : e, f \subset [0,1],\ \operatorname{mes} e > 0,\ \operatorname{mes} f > 0\big\} > 0.$$

Здесь Q_e обозначает оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0,1]$. Следом за этим в работе [47] Е. М. Семёнов и А. М. Штейнберг описали класс возрастающих вогнутых функций φ, для которых равенство

$$\inf\big\{\|Q_e A Q_f\|_{\Lambda(\varphi)} : e, f \subset [0,1],\ \operatorname{mes} e > 0,\ \operatorname{mes} f > 0\big\} = 0$$

выполняется для любого линейного непрерывного в $\Lambda(\varphi)$ оператора A. Там же аналогичная задача решается для пространств $M(\varphi)$ и $L_{p,q}$.

Значительный прогресс в развитии геометрии банаховых пространств во второй половине 20-го века был связан с понятиями типа и котипа Радемахера, введенными в начале 70-х годов Й. Хоффман-Йоргенсеном и Б. Морэем.

Говорят, что банахово пространство X имеет котип q (соответственно q-свойство Орлича), если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых элементов

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, x_i \right\| dt,$$

соответственно

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \max_{\epsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|.$$

Довольно долго было неизвестно, совпадают ли классы банаховых пространств с котипом 2 и 2-свойством Орлича. В работе [48] такое совпадение было доказано для всех симметричных функциональных пространств. Для общих банаховых решеток такого совпадения нет (соответствующий пример был построен М. Талаграном). Заметим, что полное описание типа и котипа функциональных пространств Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ было получено в [49].

Изучению некоторых классов операторов, действующих между функциональными пространствами, посвящены совместные работы Е. М. Семёнова и И. Я. Шнейнберга [50, 51]. Пусть S — ортогональный проектор на подпространство констант:

$$Sx(t) = \int_0^1 x(s)\, ds.$$

Авторы нашли описание множества всех линейных ограниченных операторов T таких, что

$$\|S + \epsilon T\|_{L_p \to L_q} = 1$$

для всех достаточно малых $\epsilon > 0$. Эти результаты были использованы для получения векторнозначных аналогов классического неравенства Хинчина.

Предположим, что E и F — два пространства с симметричными базисами $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. В работе [52] Е. М. Семёнов и Ю. Аппель нашли условие, при котором дистанция Банаха — Мазура между их конечномерными подпространствами E^n и F^n с базисами $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{f_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, соответственно, реализуется на тождественном операторе.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, S_n — группа перестановок множества $\{1, 2, \ldots n\}$ и l — произвольная биекция между S_n и множеством $\{1, 2, \ldots, n!\}$. Если $x = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, то $x_1^*, x_2^*, \ldots x_{n^2}^*$ — перестановка чисел $|x_{ij}|$ в убывающем порядке.

В работе С. Монтгомери-Смита и Е. М. Семёнова [53] для каждого $1 \leqslant q \leqslant \infty$ определен квазилинейный оператор T_q :

$$T_q x(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i,\pi(i)}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad t \in \left[\frac{l(\pi)-1}{n!}, \frac{l(\pi)}{n!}\right),$$

со стандартной модификацией при $q = \infty$. Оператор T_q действует из множества $n \times n$ матриц во множество ступенчатых функций; при этом, если пространство E симметрично, то норма $\|T_q x\|_E$ не зависит от выбора биекции l. Кроме того, в [53] также на множестве $n \times n$ матриц $x = (x_{ij})$ рассматривается оператор

$$Ux(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(t),$$

где χ_e — характеристическая функция измеримого множества $e \subset [0,1]$. Авторы подробно исследуют класс F_q всех симметричных пространств, для которых эквивалентность

$$\|T_q x\|_E \approx \|Ux\|_E + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{n^2} x^{*q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

выполнена с константами, не зависящими ни от матрицы x, ни от n. Показано, что класс F_q имеет глубокие связи с другими известными семействами симметричных пространств.

В совместной с Ф. Л. Эрнандесом работе [54] Е. М. Семёнов возвращается к характеризации пространств L_p среди всех симметричных пространств и получает ее в очень далеких от работы [34] терминах. В [54] вводится понятие так называемого «красивого» (nice) симметричного пространства. Пусть E — симметричное пространство функций на $[0,\infty)$, и пусть $E[0,1]$ — его сужение на [0,1]. Для заданной функции $a = a(t) \in E[0,1]$ через a_k обозначается сдвиг функции $a(t)$ на интервал $[k-1,k]$, Q_a — это подпространство, порожденное последовательностью $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Если для любой функции $a \in E[0,1]$ подпространство Q_a дополняемо в E, то пространство E называется «красивым». Класс всех таких пространств обозначим через $\mathscr{N}$. Среди многих результатов работы [54] отметим упомянутую выше характеризацию: пусть E — симметричное пространство, фундаментальная функция которого вместе с фундаментальной функцией двойственного пространства E' непрерывны в нуле. Эквивалентны следующие утверждения:

1) $E \in \mathscr{N}$ и $E' \in \mathscr{N}$.

2) $E \equiv L_p$ для некоторого $1 < p < \infty$.

В дальнейшем аналогичные вопросы изучались Е. М. Семёновым в совместных работах с С. В. Асташкиным и Л. Малиграндой (см. [55, 56]) в случае симметричного пространства E на отрезке (но теперь уже речь шла о равномерной дополняемости конечномерных подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами функции из E).

Особо следует сказать о применении Е. М. Семёновым интерполяционных методов и результатов теории симметричных пространств для решения задач теории ортогональных рядов. Отметим наиболее известные его работы в этом направлении, послужившие началом целой серии исследований. Одной из первых была статья [57], результаты которой в переработанном виде вошли в монографию [30].

В работе [58] были детально изучены ряды по тригонометрической системе. Отметим следующий результат, который очень характерен для творчества Е. М. Семёнова. Будем говорить, что банахово пространство E измеримых на $[0,1]$ функций обладает B-свойством относительно ортонормированной системы функций $\{\omega_k\}$, если для любой последовательности чисел $\alpha_k \to 0$ найдется функция $f \in E$ и последовательность номеров (n_k) такие, что $c_{n_k}(f) = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, где $c_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\omega_k\}$. Было доказано, что в классе симметричных пространств только пространство L_1 обладает B-свойством относительно тригонометрической системы функций.

Еще один окончательный результат был получен в работе [59], где показано, что для симметричного пространства E на $[0,1]$ эквивалентны следующие условия:

(a) любая равномерно ограниченная ортонормированная система $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,\psi}(f)^2 < \infty$ ($c_{n,\psi}$ — коэффициенты Фурье по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$) для каждой $f \in E$;

(b) $E \subset L(\log L)^{1/2}$, где $L(\log L)^{1/2}$ — классическое пространство Зигмунда, состоящее из функций f таких, что $\int_0^1 |f(t)| \log^{1/2}(e/t)\,dt < \infty$.

Как уже говорилось, в работе [35] изучались свойства рядов по системе Радемахера, принадлежащих различным классам симметричных пространств. В частности, там были получены необходимые и достаточные условия на сумму ряда, гарантирующие принадлежность последовательности его коэффициентов пространству l_p для $1 < p < 2$. В дальнейшем эта работа послужила началом целой серии исследований (см. [60–62]). Расширение множества функциональных пространств, инициированное в [35], привело в дальнейшем к открытию неожиданного свойства однозначности определения симметричных пространств, «близких» к L_∞, принадлежностью к ним сумм рядов Радемахера [63, 64], а также разнообразных связей этой системы с теорией интерполяции и геометрией функциональных пространств (см. монографию [65]).

Значительное место в научной деятельности Е. М. Семёнова занимают работы по системе Хаара. Этой тематике посвящены статьи [66–78]. Большинство из полученных в них результатов вошло в монографию [79]. Главная особенность их состоит в широком использовании методов теории операторов: свойства системы Хаара изучаются в терминах свойств операторов, естественным образом с ней связанных.

Упомянем здесь лишь некоторые, наиболее интересные, на наш взгляд, результаты, полученные Е. М. Семёновым в этом направлении.

Глава 7 монографии [79] посвящена изучению поведения коэффициентов Фурье — Хаара функций из различных пространств. В частности, здесь найден критерий их стремления к нулю (теорема 7.a.1). Особыми свойствами обладают эти коэффициенты для невозрастающих функций. Например, для пространств L_p в этом случае норма функции определяется с точностью до эквивалентности последовательностью ее первых коэффициентов в пачках системы Хаара (теоремы 7.a.3 и 7.a.5). В этой же главе показано, что коэффициенты Фурье — Хаара характеристических функций множеств меры $1/2$ могут быть сколь-угодно малыми.

Глава 11 посвящена изучению перестановок системы Хаара. В теореме 11.6 приводится критерий ограниченности оператора перестановки из пространства Лоренца $L_{p,r}$ в $L_{q,r}$. На основе этой теоремы получен ряд просто проверяемых достаточных условий ограниченности оператора перестановки. В теореме 11.7 вычислена норма оператора перестановки в пространстве BMO.

В главе 12 рассматриваются свойства мультипликаторов по системе Хаара. В частности, в теоремах 12.1 и 12.2 вычислена норма мультипликатора из L_p в L_q. Поточечные оценки мультипликаторов по системе Хаара составляют главное содержание следующей главы. Здесь изучается точность оценки

$$(\Lambda\, x)^*(t) \leqslant C \int\limits_0^1 \frac{x^*(s)}{t+s}\, ds,$$

где Λ — мультипликатор по системе Хаара с коэффициентами $|\lambda_{n,k}| \leqslant 1$. Сама эта оценка является следствием глубокого результата Е. М. Семёнова, полученного в работе [80].

Пусть

$$G_t(x) = \sup(\Lambda(a\, x))^*(t),$$

где супремум берется по всем функциям $a \in L_\infty$, $\|a\|_{L_\infty} \leqslant 1$, и всем мультипликаторам Λ с коэффициентами $|\lambda_{n,k}| \leqslant 1$. В теореме 13.1 доказано, что для любой функции $x \in L_1$ и для всякого $t \in (0, 1]$ имеет место оценка

$$G_t(x) \geqslant \frac{1}{4t} \int\limits_0^t x(s)\, ds.$$

Далее этот результат уточняется для неотрицательных и невозрастающих функций x. В следствии 13.7 показано, что для таких функций

$$G_t(x) \geqslant \frac{1}{28} \int_0^1 \frac{x(s)}{t+s}\, ds.$$

Глава 14 посвящена оценкам мультипликаторов по системе Хаара в пространстве L_1. Пусть для $x \in L_1$ имеет место равенство

$$F(x) = \inf \|\Lambda(a\, x)\|_{L_1},$$

где инфимум берется по всем функциям $a \in L_\infty$, $|a(t)| \geqslant 1$, для любого $t \in [0,1]$, и всем мультипликаторам Λ с $|\lambda_{n,k}| = 1$. В теореме 14.1 доказано, что для любой неотрицательной и невозрастающей функции $x \in L_1$ справедливо неравенство

$$F(x) \leqslant 4\, \|x\|_{L_{1,\infty}},$$

где $\|x\|_{L_{1,\infty}} := \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} x^*(t)\, t$. Далее установлено, что предположение о монотонности x здесь существенно.

Последняя глава 17 монографии посвящена системе функций Олевского, которая тесно связана с системой Хаара (см. также [81, 82]). Доказано, что в шкале симметричных пространств система Олевского образует безусловный базис лишь в пространствах, изоморфных L_2.

Следует сказать, что работы Е. М. Семёнова по системе Хаара оказали значительное стимулирующее влияние на дальнейшие исследования в этой области, что получило отражение в ряде монографий (см., например, [83]).

С конца 80-х — начала 90-х научная деятельность Е. М. Семёнова в значительной степени связана с тематикой банаховых пределов и их приложений. Банаховы пределы возникли как один из вариантов продолжения функционала классического предела с пространства c сходящихся последовательностей на пространство l_∞ всех ограниченных вещественных последовательностей. Их существование было анонсировано С. Мазуром в 1929 г. [84] и затем доказано в знаменитой книге С. Банаха «Теория линейных операций», изданной в 1931 г. [85]. Более точно, линейный функционал B на пространстве l_∞ называется банаховым пределом, если

(a) $Bx \geqslant 0$ для всех $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty$ таких, что $x_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$;

(b) $B(1,1,\ldots) = 1$;

(c) $Bx = BTx$ для всех $x \in l_\infty$, где T — оператор сдвига влево, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Банаховы пределы используются, как правило, при изучении несепарабельных пространств и, в частности, когда есть потребность в линейных операторах или мерах с нестандартными свойствами. Так, уже в ранее упомянутой работе [44] Е. М. Семёнов и А. М. Штейнберг применили банаховы пределы для построения ограниченных операторов специального вида на степенных пространствах Марцинкевича $M(t^{1/p})$, $p \in (1, \infty)$.

Каждый банахов предел по определению инвариантен относительно сдвига. В 1950 г. У. Эберлейн заметил, что существуют банаховы пределы, которые дополнительно инвариантны относительно регулярных преобразований Хаусдорфа [86]. Позднее, в 1953 г., его результат был обобщен Р. Куком на более широкий класс матричных преобразований [87]. С середины 90-х годов прошлого века особый интерес к банаховым пределам был вызван их применением в теории сингулярных следов. В работах [88, 89] Е. М. Семёнов

и соавторы использовали банаховы пределы для построения следов Диксмье на пространствах Марцинкевича $M(\psi)$, а в работе [90] тот же коллектив авторов показал, что важные подклассы следов Диксмье соответствуют банаховым пределам, инвариантным относительно оператора Чезаро (взятия арифметического среднего)

$$C(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots\right)$$

и операторов растяжения

$$\sigma_n(x_1, x_2, \dots) = \big(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n}, \dots\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мотивированные задачами теории сингулярных следов, Е. М. Семёнов и Ф. А. Сукочев развили подход У. Эберлейна для более общего класса операторов, действующих в пространстве l_∞ [91]. Обозначим через Γ множество линейных операторов H в l_∞ таких, что:

1. $Hx \geqslant 0$ для всех $x \in l_\infty$ таких, что $x_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ и $H(1, 1, \dots) = (1, 1, \dots)$;
2. $Hc_0 \subset c_0$, где c_0 — подпространство сходящихся к нулю последовательностей;
3. $\limsup\limits_{j\to\infty} (A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in l_\infty$, $A \in R$, $R = R(H) = \operatorname{conv}\{H^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Легко показать, что оператор Чезаро и операторы растяжения удовлетворяют этим условиям и, следовательно, принадлежат множеству Γ. В работе [91] доказано, что для любого $H \in \Gamma$ существует H-инвариантный банахов предел, т. е. такой банахов предел B, что $Bx = BHx$ для всех $x \in l_\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ множества всех банаховых пределов, банаховых пределов, инвариантных относительно оператора Чезаро и банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения, соответственно. Предыдущий результат показывает, в частности, что множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непусты. Известно, что вложения $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n) \subset \mathfrak{B}$ — строгие для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. С помощью теоремы Кёнига — Холла о паросочетаниях из теории графов Е. М. Семёнов и его соавторы доказали, что вложение $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}(\sigma_n)$ справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ [92]. Более того, вложение $\mathfrak{B}(C) \subset \cap_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$ — также строгое [93].

Важным и удобным инструментом исследования банаховых пределов являются функциональные характеристики. Е. М. Семёнов и Ф. А. Сукочев ввели в рассмотрение характеристическую функцию банахова предела B, определяемую по формуле

$$\varphi_B(t) = B(r_n(t)), \quad t \in [0, 1],$$

где $r_n(t)$ — функции Радемахера [94]. Как оказалось, эта функция однозначно определяет банаховы пределы. Более того, если $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ и $\varphi_{B_1}(t) \leqslant \varphi_{B_2}(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, то $B_1 = B_2$.

Для произвольного фиксированного ограниченного функционала h на l_∞ и $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$ рассмотрим функцию

$$f_{h,x}(t) = h\big(\chi\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant t\}\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

где χ_A — характеристическая функция множества $A \subseteq \mathbb{N}$. Функция $f_{h,x}$ называется функцией распределения h и x. Очевидно, что в случае банаховых пределов (т. е. $h \in \mathfrak{B}$), для любого $x \in l_\infty$ существуют такие $t_1 \leqslant t_2$, что $f_{h,x}(t) = 0$ для $t < t_1$ и $f_{h,x}(t) = 1$ для $t > t_2$. Также очевидно, что функция $t \mapsto f_{h,x}(t)$ не убывает по t.

Хорошо известно, что l_∞^* является AL-пространством. Следовательно, оно изометрически порядково изоморфно пространству $L_1(\Omega)$ для некоторого множества Ω с мерой μ. Пусть $\Omega = \Omega_d \cup \Omega_c$ — такое разбиение множества Ω на измеримые подмножества, что мера μ в сужении на Ω_d дискретна, а на Ω_c — непрерывна. Имеем $l_\infty^* \equiv L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c)$ (т. е. изометрически). Е. А. Алехно доказал, что функционал h из положительной части единичной сферы пространства l_∞^* принадлежит множеству $L_1(\Omega_c)$ тогда и только тогда, когда функция распределения $f_{h,x}$ непрерывна для некоторого $x \in l_\infty$ [95].

Ядро $N(T^* - I)$ оператора $T^* - I$ является пространством Рисса в l_∞^*, а значит, само является AL-пространством и, в свою очередь, изометрически порядково изоморфно пространству $L_1(\Omega')$ для некоторого множества Ω' с мерой μ'. Так же, как и ранее, множество Ω' допускает разбиение на такие измеримые подмножества Ω'_d и Ω'_c, что мера μ' в сужении на Ω'_d дискретна, а на Ω'_c — непрерывна. Тогда $N(T^* - I) \equiv L_1(\Omega'_d) \oplus L_1(\Omega'_c)$ (т. е. изометрически).

Пространство $N(T^* - I)$ совпадает с пространством всех линейных функционалов на l_∞, которые инвариантны относительно оператора T, а значит, положительная часть его единичной сферы $S^+_{N(T^*-I)}$ в точности совпадает со множеством $\mathfrak{B}$ всех банаховых пределов. Таким образом, множество $\mathfrak{B}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_d \oplus \mathfrak{B}_c$. При этом $\mathfrak{B}_d$ и $\mathfrak{B}_c$ называются дискретным и непрерывным подмножествами множества банаховых пределов $\mathfrak{B}$. Они могут быть описаны в терминах следующей характеристики, введенной Е. М. Семёновым в работе [96]. Каждый функционал $B \in \mathfrak{B}$ порождает функцию

$$\gamma(B,t) = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi\big[2^n, 2^{n+t}\big)\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Е. М. Семёновым с соавторами было установлено, что банахов предел B принадлежит непрерывной (соответственно дискретной) части множества $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда функция $\gamma(B, \cdot\,)$ непрерывна (соответственно функция $\gamma(B, \cdot\,)$ является суммой скачков) [97].

Одновременно Е. М. Семёнов инициировал вычисление банаховых пределов из различных классов для некоторых «естественных» числовых последовательностей, например, для последовательности $\{L_n(W)/\log_2 n\}_{n=1}^\infty$, где $L_n(W)$ — константы Лебега системы Уолша [98]. Аппарат банаховых пределов позволил детально исследовать структуру этой последовательности. В частности, выяснилось, что она не регулярна (значения банаховых пределов заполняют отрезок $[0, 1/3]$), однако средние, соответствующие двоичным пачкам, имеют предел, равный $1/4$.

Евгений Михайлович Семёнов — автор более 200 научных работ и двух монографий. Работы Е. М. Семёнова получили широкое международное признание. Он активно и плодотворно сотрудничает с математиками разных стран, что хорошо видно по приведенной библиографии. Ссылки на его работы можно без труда найти в статьях многих российских и зарубежных математиков (в настоящий момент, по данным MathSciNet он имеет 2146 цитирований в 1418-ти публикациях).

Е. М. Семёнов активно участвовал в организации и проведении широко известных зимних Воронежских школ. Его лекции слушали математики многих российских университетов. Е. М. Семёнов свободно владеет английским языком, что значительно облегчает его общение с зарубежными коллегами. Он участвовал в работах очень многих международных конференций, выступал с докладами и лекциями в университетских аудиториях Австралии, Израиля, Испании, Италии, Нидерландов, США, Швеции и других стран.

Евгений Михайлович увлеченно занимается математикой, у него много идей и за-

мыслов, которыми он вдохновляет учеников и коллег. Более 20-ти его учеников стали кандидатами, а шестеро из них — докторами физико-математических наук.

Евгений Михайлович — доброжелательный и скромный человек, готовый в любое время обсуждать математические вопросы, и это неизменно привлекает к нему внимание как сложившихся математиков, так студентов и аспирантов. Он — сторонник здорового образа жизни, в молодости активно занимался альпинизмом.

С 1971 г. и по настоящее время Е. М. Семёнов является заведующим кафедрой теории функций и геометрии Воронежского университета, с 1978 г. по 1983 г. он работал деканом математического факультета.

Свой юбилей Евгений Михайлович встречает в расцвете творческих сил, он по-прежнему находит радость в напряженной творческой работе. Пожелаем ему доброго здоровья, новых успехов в математике, талантливых учеников, удачи в реализации всего задуманного.

С. В. Асташкин, А. Г. Кусраев, И. Я. Новиков,
С. Я. Новиков, Д. М. Поляков, А. С. Усачев,
А. М. Штейнберг

Литература

1. *Riesz M.* Sur les maxima des formes bilineaires et sur les fonctionelles lineaires // Acta Math.—1927.—Vol. 49.—P. 465–497. DOI: 10.1007/BF02564121.
2. *Thorin G. O.* An extension of convexity theorem due to M. Riesz // Comm. Sem. Math. Univ. Lund.—1939.—Vol. 4.—P. 1–5.
3. *Orlicz W.* Ein satz über die erweiterung von linearen operationen // Studia Math.—1934.—Vol. 5.—P. 127–140. DOI: 10.4064/sm-5-1-127-140.
4. *Marcinkiewicz J.* Sur l'interpolation d'operateurs // C. R. Acad. Sci. Paris.—1939.—Vol. 208.—P. 1272–1273.
5. *Zygmund A.* On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations // J. Math. Pures Appl.—1956.—Vol. 35, № 2.—P. 223–248.
6. *Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Об одной шкале пространств // Докл. АН СССР.—1961.—Т. 138, № 4.—С. 763–766.
7. *Lorentz G. G.* On the theory of spaces Λ // Pacific J. Math.—1951.—Vol. 1, № 3.—P. 411–429. DOI: 10.2140/pjm.1951.1.411.
8. *Семенов Е. М.* Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 148, № 5.—С. 1038–1041.
9. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math.—1964.—Vol. 24, № 2.—P. 113–190. DOI: 10.4064/sm-24-2-113-190.
10. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Гипершкалы банаховых структур // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 170, № 2.—С. 265–267.
11. *Luxemburg W. A.* Banach Function Spaces.—Van Gorcum and C. Assen, 1955.
12. *Семенов Е. М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 156, № 6.—С. 1292–1295.
13. *Lorentz G. G.* Bernstein Polinomials.—Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.
14. *Halperin J.* Function spaces // Canad. J. Math.—1953.—Vol. 5, № 3.—P. 273–288. DOI: 10.4153/CJM-1953-031-3.
15. *Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция операторов ослабленного типа // Функцион. анал. и его прил.—1973.—Т. 7, № 2.—С. 89–90. DOI: 10.1007/BF01078893.
16. *Семенов Е. М.* Одна новая интерполяционная теорема // Функцион. анал. и его прил.—1968.—Т. 2, № 2.—С. 68–80. DOI: 10.1007/BF01075950.
17. *Boyd D. W.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Canad. J. Math.—1969.—Vol. 21, № 5.—P. 1245–1254. DOI: 10.4153/CJM-1969-137-x.
18. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math.—1966.—Vol. 26, № 3.—P. 273–299. DOI: 10.4064/sm-26-3-273-299.

19. *Дикарев В. А., Мацаев В. И.* Точная интерполяционная теорема // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 168, № 5.—С. 986–988.
20. *Дмитриев А. А., Семенов Е. М.* Оптимальность интерполяционной теоремы М. Рисса в верхнем треугольнике // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 6.—С. 1298–1300.
21. *Semenov E. M.* On the stability of real interpolation method in the class of rearrangement invariant spaces // Israel Math. Conf. Proc.—1999.—Vol. 13.—P. 172–182.
22. *Мадженес Э.* Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных // Успехи мат. наук.—1966.—Т. 21, № 2.—С. 169–218.
23. *Митягин Б. С., Семенов Е. М.* Пространство C^k не является интерполяционным между C и C^n, $0 < k < n$ // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 228, № 3.—С. 543–546.
24. *Митягин Б. С., Семенов Е. М.* Отсутствие интерполяции линейных операторов в пространствах гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1977.—Т. 41, № 6.—С. 1289–1328. DOI: 10.1070/IM1977v011n06ABEH001767.
25. *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов в пространствах функций с заданным модулем непрерывности // Материалы 7-й мат. и 7-й физ. межвуз. науч. конф. Дальн. Вост.—Хабаровск, 1968.—С. 33–34.
26. *Peetre J.* Exact interpolation theorems for Lipshitz continuous functions // Ric. Mat.—1969.—Vol. 18, № 2.—P. 239–259.
27. *Митягин Б. С.* Интерполяционная теорема для модулярных пространств // Мат. сб.—1965.—Т. 66, № 4.—С. 473–482.
28. *Peetre J.* Espaces intermediaries et la theorie constructive des fonctions // C. R. Acad. Sci. Paris.—1963.—Vol. 256, № 1.—P. 54–55.
29. *Седаев А. А., Семенов Е. М.* О возможности описания интерполяционных пространств в терминах $\mathscr{K}$-метода Питре // Оптимизация: Сб. тр. Ин-та математики СО АН СССР.—1971.—Вып. 4 (21).—С. 98–114.
30. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.
31. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение.—М.: Мир, 1980.
32. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.
33. *Брудный Ю. И., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал.—М.: ВИНИТИ, 1986.—Т. 24.—С. 3–163. DOI: 10.1007/BF01106938.
34. *Браверман М. Ш., Семенов Е. М.* Характеристические свойства пространств L_p // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 255, № 2.—С. 270–272.
35. *Rodin V. A., Semenov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math.—1975.—Vol. 1, № 3.—P. 207–222. DOI: 10.1007/BF01930966.
36. *Родин В. А., Семенов Е. М.* О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемахера, в симметричном пространстве // Функцион. анал. и его прил.—1979.—Т. 13, № 2.—С. 91–92. DOI: 10.1007/BF01077254.
37. *Семенов Е. М.* Геометрия функциональных пространств // Школа по теории операторов.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979.—14 с.
38. *Raynaud Y.* Complemented Hilbertian subspaces in rearrangement invariant function spaces // Illinois J. Math.—1995.—Vol. 39.—P. 212–250. DOI: 10.1215/ijm/1255986545.
39. *Новиков С. Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных пространств на $[0, 1]$ // Мат. заметки.—1997.—Т. 62, № 4.—С. 549–563. DOI: 10.4213/mzm1638.
40. *Новиков С. Я.* Последовательности функций в симметричных пространствах.—Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2008.
41. *Grothendieck A.* Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p // Canadian J. Math.—1954.—Vol. 6, № 1.—P. 158–160. DOI: 10.4153/CJM-1954-017-x.
42. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
43. *Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В.* Структура подпространств пространств $\Lambda_p(\varphi)$ // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 247, № 3.—С. 552–554.
44. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Об одном свойстве симметричных пространств, второе ассоциированное к которым несепарабельно // Мат. заметки.—2020.—Т. 107, № 1.—С. 11–22. DOI: 10.4213/mzm12365.
45. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Об ортогональности в несепарабельных перестановочно-инвариантных пространствах // Мат. сб.—2021.—Т. 212, № 11.—С. 55–72. DOI: 10.4213/sm9543.
46. *Semenov E. M., Tsirelson B. S.* The problem of smallness of operator blocks in L_p spaces // Z. Anal. Anwend.—1983.—Vol. 2, № 4.—P. 367–373. DOI: 10.4171/ZAA/73.

47. *Семенов Е. М., Штейнберг А. М.* Оценки норм операторных блоков в банаховых решетках // Мат. сб.—1985.—Т. 126, № 3.—С. 327–343. DOI: 10.1070/SM1986v054n02ABEH002973.
48. *Семенов Е. М., Штейнберг А. М.* Свойство Орлича симметричных пространств // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 314, № 6.—С. 1341–1344.
49. *Новиков С. Я.* Котип и тип функциональных пространств Лоренца // Мат. заметки.—1982.—Т. 32, № 2.—С. 213–221. DOI: 10.1007/BF01142711.
50. *Семенов Е. М., Шнейберг И. Я.* Гиперсжимающие операторы и неравенства Хинчина // Функцион. анал. и его прил.—1988.—Т. 22, № 3.—С. 87–88. DOI: 10.1007/BF01077638.
51. *Семенов Е. М., Шнейберг И. Я.* Сжимающие операторы и неравенство Хинчина // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 1.—С. 141–149. DOI: 10.1007/BF00971157.
52. *Appell J., Semenov J. M.* Estimating the Banach–Mazur distance of some pairs of symmetric spaces // Math. Nachr.—1987.—Vol. 132, № 1.—P. 7–14. DOI: 10.1002/mana.19871320102.
53. *Montgomery-Smith S., Semenov E. M.* Random rearrangements and operators // Amer. Math. Soc. Transl.—1998.—Vol. 184.—P. 157–183.
54. *Hernandez F. L., Semenov E. M.* Subspaces generated by translations in rearrangement invariant spaces // J. Funct. Anal.—1999.—Vol. 169.—P. 52–80. DOI: 10.1006/jfan.1999.3493.
55. *Асташкин С. В., Малигранда Л., Семенов Е. М.* О дополняемости подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами функций // Докл. РАН.—2002.—Т. 66, № 8.—С. 390–392.
56. *Astashkin S. V., Maligranda L., Semenov E. M.* Multiplicator space and complemented subspaces of rearrangement invariant space // J. Funct. Anal.—2003.—Vol. 202, № 1.—P. 247–276. DOI: 10.1016/S0022-1236(02)00094-0.
57. *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье // Докл. АН СССР.—1967.—Т. 176, № 6.—С. 1251–1254.
58. *Гулисашвили А. Б., Родин В. А., Семенов Е. М.* Коэффициенты Фурье суммируемых функций // Мат. сб.—1977.—Т. 102, № 3.—С. 362–371. DOI: 10.1070/SM1977v031n03ABEH002305.
59. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* О коэффициентах Фурье лакунарных систем // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 4.—С. 483–491. DOI: 10.4213/mzm10634.
60. *Montgomery-Smith S. J.* The distribution of Rademacher sums // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—Vol. 109, № 2.—P. 517–522. DOI: 10.1090/S0002-9939-1990-1013975-0.
61. *Родин В. А., Семенов Е. М.* К вопросу о рядах Радемахера в симметричных пространствах // Сб. науч.-практ. конф. ВВШ МВД России.—Воронеж, 1994.—С. 5–6.
62. *Овчинников В. И., Распопова В. Д., Родин В. А.* Точные оценки коэффициентов Фурье суммируемых функций и K-функционалы // Мат. заметки.—1982.—Т. 32, № 3.—С. 295–302. DOI: 10.1007/BF01140193.
63. *Асташкин С. В.* О рядах по системе Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к L_∞ // Функцион. анал. и его прил.—1998.—Т. 32, № 3.—С. 62–65. DOI: 10.4213/faa423.
64. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Об одном свойстве системы Радемахера и $\Lambda(2)$-пространств // Мат. сб.—2024.—Т. 215, № 3.—С. 3–20. DOI: 10.4213/sm9922.
65. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах.—М.: Физматлит, 2017.
66. *Монтгомери-Смит С., Семенов Е. М.* Усреднение коэффициентов Фурье — Хаара // Мат. сб.—1999.—Т. 190, № 10.—С. 49–64. DOI: 10.4213/sm432.
67. *Семенов Е. М.* Об эквивалентности в L_p перестановок системы Хаара // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 6.—С. 1258–1260.
68. *Осипов В. Б., Садовская О. Б., Семенов Е. М.* Двусторонние оценки мультипликаторов Фурье — Хаара // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 294, № 2.—С. 276–278.
69. *Semyonov E. M., Stockert B.* Haar system rearrangement in the space L_p // Anal. Math.—1981.—Vol. 7, № 4.—P. 277–295. DOI: 10.1007/BF01908219.
70. *Semyonov E. M.* On the boundedness of operators rearranging the Haar system in the spaces L_p // Int. Equat. Oper. Theory.—1983.—Vol. 6, № 3.—P. 385–404. DOI: 10.1007/BF01691905.
71. *Новиков И. Я., Семенов Е. М.* О коэффициентах Фурье — Хаара // Мат. заметки.—1984.—Т. 36, № 3.—С. 351–358. DOI: 10.1007/BF01141938.
72. *Семенов Е. М.* Перестановки системы Хаара в пространствах Лоренца // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 158–164. DOI: 10.1007/BF00973478.
73. *Семенов Е. М.* Оценки мультипликаторов по системе Хаара в пространстве L_1 // Докл. РАН.—1994.—Т. 334, № 5.—С. 564–565.
74. *Семенов Е. М.* RUC-базисные свойства системы Хаара // Докл. РАН.—1996.—Т. 348, № 5.—С. 590–591.
75. *Лелонд О. В., Семенов Е. М., Уксусов С. Н.* Пространство мультипликаторов Фурье — Хаара // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 1.—С. 130–138. DOI: 10.1007/s11202-005-0011-4.

76. *Семенов Е. М., Уксусов С. Н.* Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 2.—С. 388–395. DOI: 10.1134/S0037446612020139.
77. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Пространства, определяемые функцией Пэли // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 7.—С. 3–24. DOI: 10.4213/sm8159.
78. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Пространства Пэли // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 1.—С. 27–35. DOI: 10.1134/S0037446615010036.
79. *Novikov I., Semenov E.* Haar Series and Linear Operators.—Dordrecht: Springer, 1997. DOI: 10.1007/978-94-017-1726-7.
80. *Semenov E. M.* Estimates for operator of weak type // Function Analysis and Related Topics: Proc. Int. Symp., Sapporo, Japan, 31 Aug – 4 Sep. 1990.—Singapore: World Scientific, 1991.—P. 172–178.
81. *Семенов Е. М.* Базисные свойства системы Олевского // Мат. заметки.—1993.—Т. 54, № 3.—С. 155–156. DOI: 10.1007/BF01209565.
82. *Казарян К. С., Семенов Е. М.* RUC-базисы и система Олевского // Мат. заметки.—2004.—Т. 75, № 4.—С. 566–579. DOI: 10.4213/mzm53.
83. *Müller P. F.* Isomorphisms Between H^1 Spaces.—Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.—(Mathematical Monographs (New Series). Vol. 66). DOI: 10.1007/b137684.
84. *Mazur S.* O metodach sumowalności // Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement).—1929.—P. 102–107.
85. *Банах С.* Теория линейных операций.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
86. *Eberlein W. F.* Banach–Hausdorff Limits // Proc. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 1.—P. 662–665. DOI: 10.1090/s0002-9939-1950-0038009-0.
87. *Cooke R. G.* Generalizations of Banach–Hausdorff limits // Proc. Amer. Math. Soc.—1953.—Vol. 4.—P. 410–417. DOI: 10.2307/2032141.
88. *Dodds P. G., de Pagter B., Semenov E. M., Sukochev F. A.* Symmetric functionals and singular traces // Positivity.—1998.—Vol. 2, № 1.—P. 47–75. DOI: 10.1023/A:1009720826217.
89. *Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Сингулярные симметричные функционалы // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2002.—Т. 290.—С. 42–71. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000042448.87252.0f.
90. *Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Изв. РАН. Сер. мат.—2003.—Т. 67, № 6.—С. 111–136. DOI: 10.4213/im461.
91. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits and applications // J. Funct. Anal.—2010.—Vol. 259, № 6.—P. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.
92. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry // Pacific J. Math.—2020.—Vol. 306, № 1.—P. 357–373. DOI: 10.2140/pjm.2020.306.357.
93. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Dilation invariant Banach limits // Indag. Math.—2020.—Vol. 31, № 5.—P. 885–892. DOI: 10.1016/j.indag.2019.12.003.
94. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Extreme points of the set of Banach limits // Positivity.—2013.—Vol. 17, № 1.—P. 163–170. DOI: 10.1007/s11117-011-0155-3.
95. *Alekhno E. A.* On Banach–Mazur limits // Indag. Math.—2015.—Vol. 26.—P. 581–614. DOI: 10.1016/j.indag.2015.04.001.
96. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. мат.—2019.—Т. 83, № 1.—С. 140–167. DOI: 10.4213/im8704.
97. *Avdeev N., Semenov E., Usachev A., Zvolinskii R.* Decomposition of the set of Banach limits into discrete and continuous subsets // Ann. Funct. Anal.—2024.—Vol. 15, Article no. 81. DOI: 10.1007/s43034-024-00382-5.
98. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Константы Лебега системы Уолша и банаховы пределы // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 57, № 3.—С. 512–526. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.303.