Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 109–123

УДК 517.968.220
DOI 10.46698/q2158-4503-2268-b

К ТЕОРИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

Л. Н. Раджабова[1], **Н. Раджабов**[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

E-mail: lutfya62@mail.ru, nusrat38@mail.ru

Аннотация. В прямоугольнике $D = \{(x, y) : a < x < a_1,\ b < y < b_1\}$ с границей $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ изучается переопределенная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, которая состоит из двумерного интегрального уравнения и двух одномерных интегральных уравнений. Решение переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями ищется в классе непрерывных функций в прямоугольнике D и обращающихся в нуль на Γ_1, Γ_2. В случае, когда основным уравнением изучаемой переопределенной системы интегральных уравнений является первое уравнение системы, и коэффициенты двумерного интегрального уравнения связаны и не связаны между собой особым образом, получим условия совместности уравнений системы. В случае, когда коэффициенты первого уравнения переопределенной системы не связаны между собой, решение переопределенной системы интегральных уравнений ищется в виде обобщенных степенных рядов. В работе получены явные решения переопределенной системы уравнений, которые в зависимости от знака коэффициентов могут содержать произвольные постоянные. Определены условия совместности уравнений системы, изучены свойства решений, ставятся и решаются задачи типа Коши, где условия задаются на сингулярных многообразиях.

Ключевые слова: переопределенная система уравнений, интегральное уравнение типа Вольтерра, особые линии, произвольные постоянные.

AMS Subject Classification: 45D05.

Образец цитирования: *Раджабова Л. Н., Раджабов Н.* К теории переопределенных систем интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 109–123. DOI: 10.46698/q2158-4503-2268-b.

1. Введение

Отметим, что изучению интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций посвящены известные монографии Н. И. Мусхелишвили [1], Ф. Д. Гахова [2], И. Н. Векуа [3]. Достойный вклад в развитие теории интегральных уравнений с непрерывными ядрами, со слабо-сингулярными ядрами, многомерных интегральных уравнений внес труд С. Г. Михлина [4]. Работы А. Джураева [5], Г. Джангибекова [6] и их учеников посвящены изучению обобщенных аналитических функций, также связанных с ними двумерных сингулярных интегральных уравнений. Исследованию характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в исключительном случае, получению условия разрешимости и явной формулы представления решения посвящена

работа А. П. Солдатова [7]. Теория сингулярных интегральных уравнений с особенностями логарифмического или степенного типа, а также одновременно со слабыми и сильными особенностями в различных сочетаниях, была разработана Н. Б. Плещинским [8]. Основам вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численному решению уравнений с ними, построению и обоснованию вычислительных схем решений для слабо-сингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов посвящены труды С. А. Довгого, И. К. Лифанова [9], Г. А. Расолько [10] и И. В. Байкова [11].

Отметим, что ранее в работах Н. Раджабова [12] были исследованы интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми левыми и правыми граничными, а также внутренними сингулярными или сверх-сингулярными ядрами. Изучению переопределенных систем одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными или сверхсингулярными точками в ядре посвящена монография [13]. В [14] исследованы двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми и сильно-особыми граничными линиями в прямоугольнике. Работы [15–17] посвящены изучению двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми и сильно-особыми граничными линиями по одной из переменных и слабо-особыми линиями по второй переменной на полосе. В данной статье исследуется переопределенная система интегральных уравнений, которая состоит из одного двумерного и двух одномерных интегральных уравнений с особыми линиями. Для этой системы уравнений получены явные решения, которые могут содержать произвольные постоянные, определены условия совместности уравнений системы, изучены свойства решений, а также выписываются решения соответствующих задач типа Коши.

2. Основной результат

Пусть дан прямоугольник $D = \{(x,y) : a < x < a_1,\ b < y < b_1\}$ с граничными линиями $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$. Рассмотрим в нем переопределенную систему интегральных уравнений с особыми линиями вида

$$\begin{cases} u(x,y) + \lambda \int\limits_a^x \frac{u(t,y)}{t-a}\,dt - \mu \int\limits_y^b \frac{u(x,s)}{b-s}\,ds + \delta \int\limits_a^x \frac{dt}{t-a} \int\limits_y^b \frac{u(t,s)}{b-s}\,ds = f(x,y), \\ u(x,y) + \nu \int\limits_a^x \frac{u(t,y)}{t-a}\,dt = g_1(x,y), \\ u(x,y) - \chi \int\limits_y^b \frac{u(t,s)}{b-s}\,ds = g_2(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где f, g_1, g_2 — заданные функции, λ, μ, δ, ν, χ — заданные числа, u — искомая функция.

Решение переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми ядрами (1) будем искать в классе функций $u \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0,\ x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0,\ y \to b.$$

Будем говорить, что в системе (1) основным уравнением является первое, если сначала находится его решение, а после подчиняется второму и третьему уравнению.

Аналогичным образом вводится понятие основного второго и третьего уравнений.

Отметим, что если в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является первое, то функция f обращается в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_1}\Big], \quad \delta_1 > |\lambda|, \text{ при } x \to a, \tag{2}$$

$$f(x,y) = o\Big[(b-y)^{\gamma_1}\Big], \quad \gamma_1 > \mu, \text{ при } y \to b. \tag{3}$$

Тогда согласно [14], явное решение первого уравнения системы (1) при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (b-y)^{\mu}\varphi(x) + (x-a)^{\lambda}\psi(y) + f(x,y) - \lambda \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda} \frac{f(t,y)}{t-a}\,dt \\ &+\mu \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu} \frac{f(x,s)}{b-s}\,ds - \lambda\mu \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda} \frac{dt}{t-a} \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu} \frac{f(t,s)}{b-s}\,ds, \end{aligned} \tag{4}$$

где φ, ψ — произвольные функции.

Подставляя решение вида (4) во второе и третье уравнения системы, определяем условия совместности уравнений системы, значения произвольных функций в решении вида (4) для различных значений коэффициентов переопределенной системы (1). Для данной системы в случае, когда коэффициенты первого уравнения связаны между собой, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть в системе интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями* (1) *при соотношениях* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu < 0$, $\chi > 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_1}\Big], \quad \delta_1 > |\lambda|, \text{ при } x \to a, \tag{5}$$

$$f(x,y) = o\Big[(b-y)^{\gamma_1}\Big], \quad \gamma_1 > \mu, \text{ при } y \to b, \tag{6}$$

существуют пределы

$$(b-y)^{-\mu} g_1(x,y)\,|_{y=b} = g_1(x), \tag{7}$$

$$(x-a)^{\lambda} g_2(x,y)\,|_{x=a} = g_2(y), \tag{8}$$

причем $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$g_1(x) = o\Big[(x-a)^{\delta_2}\Big], \quad \delta_2 > |\nu|, \text{ при } x \to a, \tag{9}$$

$$g_2(y) = o\Big[(b-y)^{\gamma_3}\Big], \quad \gamma_3 > \chi, \text{ при } y \to b. \tag{10}$$

При этом функции f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности*

$$\begin{aligned} &\mu g_1(x,y) + (b-y)\frac{\partial}{\partial x}\big(g_1(x,y) - f(x,y)\big) + \left(\frac{\nu-\lambda}{\lambda}\right)(x-a)^{-\lambda} \\ &\times \left[\mu\psi(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} + (b-y)(\lambda-\nu)\lambda \int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda} \frac{f(x,s)}{t-a}\,ds\right] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\lambda g_2(x,y)+\left(\frac{\chi}{\mu}-1\right)(b-y)^{\mu}\Bigg[(\lambda-\nu)(x-a)^{-\nu}c_1+(\lambda-\nu)g_1(x)$$
$$+\nu(1-\lambda)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\nu}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt+(x-a)\frac{\partial}{\partial x}g_1(x)\Bigg] \tag{12}$$
$$=(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)-g_2(x,y)+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds\right],$$

где

$$\psi(y)=(b-y)^{\chi}c_2+g_2(y)+\chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds.$$

Тогда система (1) *всегда разрешима и решение выражается равенством*

$$u(x,y)=(b-y)^{\mu}\left[(x-a)^{-\nu}c_1+g_1(x)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt\right]$$
$$+(x-a)^{|\lambda|}\left[(b-y)^{\chi}c_2+g_2(y)+\chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds\right]$$
$$+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds \tag{13}$$
$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds,$$

где c_1, c_2 *— произвольные постоянные.*

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{|\lambda|}]$, *при* $x\to a$;

$u(x,y)=o[(y-b)^{y_3}]$, *где* $y_3=\min(\mu,\chi)$ *при* $y\to b$.

Свойство решения. Умножая на $(b-y)^{(-\mu)}$ обе стороны полученного решения (13) системы (1), далее при $\mu<\chi$, $y=b$, получим

$$(b-y)^{-\mu}u(x,y)\big|_{y=b}=\left[(x-a)^{-\nu}c_1+g_1(x)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt\right].$$

Тогда

$$(x-a)^{\nu}(b-y)^{-\mu}u(x,y)\Big|_{\substack{y=b,\\ x=a}}=c_1.$$

Теперь, умножая обе стороны решения (13) на $(x-a)^{\lambda}$, при $|\nu|>|\lambda|$, $x=a$, имеем

$$(x-a)^{\lambda}u(x,y)|_{x=a}=(b-y)^{\chi}c_2+g_2(y)+\chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds.$$

Тогда

$$(y-b)^{-\chi}(x-a)^{\lambda}u(x,y)\Big|_{\substack{x=a,\\ y=b}} = c_2.$$

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu > 0$, $\chi < 0$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (5), (6) *существуют пределы* (7), (8), *где*

$$g_1(x) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0,\ x \to\ a; \tag{14}$$

$$g_2(y) = o\big[(y-b)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0,\ y \to\ b, \tag{15}$$

а функции f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности* (11) *и*

$$\lambda\ g_2(x,y)+\left(\frac{\chi}{\mu}-1\right)(b-y)^{\mu}\left[(\lambda-\nu)g_1(x)+(\nu-\lambda\nu)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\nu}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt+(x-a)\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}\right]$$
$$=(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)-g_2(x,y)+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds\right].$$

Тогда система (1) *всегда разрешима и ее единственное решение представимо в виде:*

$$u(x,y) = g_1(x,y) - \nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt + g_2(x,y) + \chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds$$
$$+f(x,y) - \lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt + \mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds$$
$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 2 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}]$ *при* $\varepsilon > 0$;

$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}]$ *при* $\varepsilon > 0$.

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu > 0$, $\chi > 0$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (5), (6) *существуют пределы* (7), (8), *где* $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (14), (10). *Функции* f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности* (11) *и*

$$\lambda\ g_2(x,y)+\left(\frac{\chi}{\mu}-1\right)(b-y)^{\mu}\left[(\lambda-\nu)g_1x+\nu(1-\lambda)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\nu}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt+(x-a)\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}\right]$$
$$=(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)-g_2(x,y)+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds\right].$$

Тогда переопределенная неоднородная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями (1) *всегда разрешима, решение содержит одну произвольную постоянную и представимо в виде:*

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (b-y)^{\mu}\left[g_1(x) - \nu\int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt\right]\\
&+(x-a)^{|\lambda|}\left[(b-y)^{\chi}c_2 + g_2(y) + \chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds\right]\\
&+f(x,y) - \lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt + \mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds\\
&-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы* 3 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}]$ *при* $\varepsilon > 0$;

$u(x,y) = o[(y-b)^{\gamma_4}]$, *где* $\gamma_4 = \min(\mu,\chi)$ *при* $y \to b$.

Свойство решения. Умножая обе стороны решения (16) на $(x-a)^{\lambda}$, при $|\nu| > |\lambda|$, $x = a$, получим

$$
(x-a)^{\lambda}u(x,y)\big|_{x=a} = (b-y)^{\chi}c_2 + g_2(y) + \chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds.
$$

Тогда

$$
(y-b)^{-\chi}(x-a)^{\lambda}u(x,y)\Big|_{\substack{x=a,\\ y=b}} = c_2.
$$

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu < 0$, $\chi < 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (5), (6) *существуют пределы* (7), (8), *где* $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (9), (15). *Функции* f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности* (11), (12), *где*

$$
\psi(y) = g_2(y) + \chi\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\chi}\frac{g_2(s)}{b-s}\,ds.
$$

Тогда переопределенная система (1) *всегда разрешима, решение содержит одну произ-*

вольную постоянную и выражается равенством

$$\begin{aligned} u(x,y) = (b-y)^{\mu} \left[(x-a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t-a}\, dt \right] \\ +(x-a)^{|\lambda|} \left[g_2(y) + \chi \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^{\chi} \frac{g_2(s)}{b-s}\, ds \right] \\ +f(x,y) - \lambda \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\lambda} \frac{f(t,y)}{t-a}\, dt + \mu \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^{\mu} \frac{f(x,s)}{b-s}\, ds \\ -\lambda\mu \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\lambda} \frac{dt}{t-a} \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^{\mu} \frac{f(t,s)}{b-s}\, ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы* 4 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o[(x-a)^{|\lambda|}]$, *при* $x \to a$;

$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$ *при* $y \to b$.

Свойство решения. Умножая на $(y-b)^{-\mu}$ обе стороны полученного решения (17) системы (1), при выполнении условия $(b-y)^{-\mu} g_2(y)|_{y=b} = 0$, при $x = a$, получим

$$(b-y)^{-\mu} u(x,y)\big|_{y=b} = (x-a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t-a}\, dt.$$

Тогда

$$(x-a)^{\nu} (b-y)^{-\mu} u(x,y)\Big|_{\substack{y=b,\\ x=a}} = c_1.$$

Теорема 5. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$, $g_1(a,b) = 0$, $g_2(a,b) = 0$, *соответственно, с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a; \tag{18}$$

$$f(x,y) = o\big[(y-b)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b, \tag{19}$$

$$g_1(x,y) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a; \tag{20}$$

$$g_1(x,y) = o\big[(y-b)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b, \tag{21}$$

$$g_2(x,y) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a; \tag{22}$$

$$g_2(x,y) = o\big[(y-b)^{\varepsilon}\big], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b. \tag{23}$$

Функции f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности:*

$$\begin{aligned} f(x,y) - (\nu-\lambda) \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\lambda} \frac{f(t,y)}{t-a}\, dt + \mu \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^{\mu} \frac{f(x,s)}{b-s}\, ds \\ +\mu(\nu-\lambda) \int\limits_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\lambda} \frac{dt}{t-a} \int\limits_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^{\mu} \frac{f(t,s)}{b-s}\, ds = g_1(x,y), \end{aligned}$$

$$f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds$$

$$+\lambda(\chi-\mu)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds=g_2(x,y).$$

Тогда переопределенная система (1) *имеет единственное решение, представимое в виде:*

$$u(x,y)=f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds$$

$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Следствие 5. *При выполнении условий теоремы* 5 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big]$, $\varepsilon>0$ *при* $x\to a$;

$u(x,y)=o[(y-b)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$ *при* $y\to\ b$.

Теорема 6. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda>0$, $\mu>0$, $\nu<0$, $\delta=-\lambda\mu$, $f,g_1,g_2\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением* (6), (14), *существует предел* (7), *где* $g_1(a)=0$ *и* $g_2(a,b)=0$ *удовлетворяют* (9), (22), (23), *соответственно. Функции* f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности:*

$$\mu g_1(x,y)+(b-y)\frac{\partial}{\partial x}\left[g_1(x,y)-(f(x,y))+(\lambda-\nu)(b-y)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt\right]=0,\ (24)$$

$$g_2(x,y)=\left(1-\frac{\chi}{\mu}\right)(b-y)^{\mu}\left[(x-a)^{-\nu}c_1+g_1(x)+\nu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\nu}\frac{g_1(t,y)}{t-a}\,dt\right]$$

$$+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds$$

$$-\lambda(\mu-\chi)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds.$$

Тогда неоднородная система (1) *всегда разрешима, решение содержит одну произволь-*

ную постоянную и выражается равенством

$$u(x,y)=(b-y)^{\mu}\left[(x-a)^{-\nu}c_1+g_1(x)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt\right]$$
$$+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds \tag{25}$$
$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Следствие 6. *При выполнении условий теоремы* 6 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$ *при* $x\to a$;

$u(x,y)=o[(y-b)^{\mu}]$ *при* $y\to b$.

Свойство решения. Умножая на $(y-b)^{-\mu}$ обе стороны полученного решения (25) системы (1), при выполнении условий теоремы 6, при $y=b$, получим

$$(b-y)^{-\mu}u(x,y)\big|_{y=b}=\left[(x-a)^{-\nu}c_1+g_1(x)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t)}{t-a}\,dt\right].$$

Следовательно, $(x-a)^{\nu}(b-y)^{-\mu}u(x,y)\Big|_{\substack{y=b,\\ x=a}}=c_1$.

Теорема 7. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda>0$, $\mu>0$, $\nu>0$, $\delta=-\lambda\mu$, $f,g_1,g_2\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением* (18), (6), *существует предел* (7), *где* $g_1(a)=0$ *и* $g_2(a,b)=0$ *удовлетворяют формулам* $g_1(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$, *при* $x\to a$, *и* (22), (23), *соответственно. Функции* f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности* (24) *и*

$$g_2(x,y)=\left(1-\frac{\chi}{\mu}\right)\left[g_1(x,y)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\nu}\frac{g_1(t,y)}{t-a}\,dt\right]$$
$$+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds$$
$$-\lambda(\mu-\chi)\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Тогда неоднородная система (1) *всегда разрешима и ее единственное решение выража-*

ется равенством

$$u(x,y)=g_1(x,y)-\nu\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|\nu|}\frac{g_1(t,y)}{t-a}\,dt$$

$$+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds$$

$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Следствие 7. *При выполнении условий теоремы* 7, *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$ *при* $x\to\ a$;

$u(x,y)=o[(y-b)^{\mu}]$ *при* $y\to\ b$.

Теорема 8. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda<0$, $\mu<0$, $\nu<0$, $\delta=-\lambda\mu$, $\chi>0$, $|\nu|>|\lambda|$, $f,g_1,g_2\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением* (5), (19), *существует предел* $(x-a)^{\lambda}g_1(x,y)|_{x=a}=g_1(y)$, *где* $g_1(b)=0$ *и* $g_2(a,b)=0$ *удовлетворяют формулам* $g_1(y)=o[(y-b)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$, *при* $y\to\ b$, *и* (22), (23), *соответственно. Функции* f, g_1, g_2 *связаны между собой условиями совместности:*

$$g_1(x,y)=\frac{1}{\lambda}\left[\nu f(x,y)-(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\big(g_1(x,y)-f(x,y)\big)\right]$$

$$+\mu(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds+\nu\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds,$$

$$g_2(x,y)=g_1(x,y)-\chi\int\limits_y^b\frac{g_1(x,s)}{b-s}\,ds+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt$$

$$+(\mu-\chi)\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds+\lambda(\chi-\mu)\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds.$$

Тогда неоднородная система (1) *всегда разрешима и ее единственное решение выражается равенством*

$$u(x,y)=g_1(x,y)+f(x,y)-\lambda\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{f(t,y)}{t-a}\,dt+\mu\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{b-s}\,ds$$

$$-\lambda\mu\int\limits_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-a}\int\limits_y^b\left(\frac{b-y}{b-s}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)}{b-s}\,ds.$$

Следствие 8. *При выполнении условий теоремы* 7 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{|\lambda|}]$ *при* $x\to\ a$;

$u(x,y)=o[(y-b)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon>0$ *при* $y\to\ b$.

В случае, когда коэффициенты первого уравнения системы (1) *не связаны между собой, т. е.* $\delta_1=\delta+\lambda\mu\neq 0$, *решение переопределенной системы* (1) *будем искать в классе непрерывных функций, представимых в виде обобщенного степенного ряда:*

$$u(x,y)=(x-a)^{-\lambda}(y-b)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(b-y)^{n+\gamma}u_n(x). \tag{26}$$

Справедливо утверждение.

Теорема 9. *Пусть в системе* (1) *при соотношениях* $\lambda<0$, $\mu>0$, $\delta_1=\delta+\lambda\mu\neq 0$, $\delta_1<0$, *функции* f, g_1, g_2 *представимы в виде:*

$$f(x,y)=(x-a)^{-\lambda}(y-b)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(b-y)^{n+\gamma}f_n(x),$$

$$g_1(x,y)=(x-a)^{-\lambda}(y-b)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(b-y)^{n+\gamma}g_{1n}(x),$$

$$g_2(x,y)=(x-a)^{-\lambda}(y-b)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(b-y)^{n+\gamma}g_{2n}(x),$$

где $f_n, g_{1n}, g_{2n}\in C(\Gamma_1)$, *в точке* $x=a$ *обращаются в нуль с асимптотическим поведением:*

$$f_n(x)=o\Big[(x-a)^{\gamma_2^1}\Big],\quad \gamma_2^1>\frac{|\delta_1|}{n+\gamma},\quad x\to\ a,$$

$$g_{1n}(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\quad \varepsilon>0,\ x\to\ a,$$

$$g_{2n}(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\quad \varepsilon>0,\ x\to\ a.$$

Функции f_n, g_{1n} *и* g_{2n} *связаны между собой условиями совместности:*

$$g_{1n}(x)=\left(1+\frac{\mu}{n+\gamma}\right)(x-a)f_n'(x)-(x-a)g_{1n}'(x)+\left(1-\lambda+\nu-\frac{\delta_1}{n+\gamma}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+\gamma}\right)f_n(x)$$
$$-\left(1+\frac{\mu}{n+\gamma}\right)\left(\lambda-\nu+\frac{\delta_1}{n+\gamma}\right)\left(1-\frac{\delta_1}{n+\gamma}\right)\int_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}}\frac{f_n(t)}{t-a}\,dt,\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$g_{2n}(x)=(n+\gamma+\mu-\chi)\left[\left(1-\frac{\nu(n+\gamma)}{\lambda(n+\gamma)+\delta_1}\frac{g_{1n}(x)}{n+\gamma+\mu}+\frac{\nu}{\lambda(n+\gamma)+\delta_1}f_n(x)\right)\right.$$
$$\left.+\nu\left(\frac{\nu}{\lambda(n+\gamma)+\delta_1}-\frac{2}{n+\gamma}\right)\int_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}}\frac{f_n(t)}{t-a}\,dt\right],\quad n=0,1,2,\dots$$

Тогда неоднородная система (1) *в классе функций* (26), *имеет единственное решение, представимое в виде*

$$u(x,y)=(x-a)^{-\lambda}(y-b)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(b-y)^{n+\gamma}\left[(x-a)^{-\frac{\delta_1}{n+\gamma}}c_n-\left(1+\frac{\mu}{n+\gamma}\right)f_n(x)\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{\mu}{n+\gamma}\right)\left(\frac{\delta_1+\lambda(n+\gamma)}{n+\gamma}\right)\int_a^x\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}}\frac{f_n(t)}{t-a}\,dt\right],\quad n=0,1,2,\dots$$

Причем, если существует предел $(x-a)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}} g_{2n}(x)\big|_{x=a} = c_n^1$, *тогда* c_n *определяется из равенства* $c_n = \frac{\delta_1+(n+\gamma)(\lambda-\nu)}{\lambda(n+\gamma)+\delta_1} c_n^1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *а при существовании предела* $(x-a)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}} g_{2n}(x) = c_n^2$, c_n *определяется из равенства* $c_n = \frac{\mu+n+\gamma}{\mu+n+\gamma-\chi} c_n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Следствие 9. *При выполнении условий теоремы* 9 *любое решение системы* (1) *из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\big[(x-a)^{|\lambda|}\big]$ *при* $x \to a$;

$u(x,y) = o\big[(y-b)^{\mu}\big]$ *при* $y \to b$.

Подобные утверждения получены и для других знаков коэффициентов системы интегральных уравнений (1), когда коэффициенты первого уравнения системы не связаны между собой. Явные представления многообразия решений и свойства системы интегральных уравнений (1) дают возможность для постановки и решения задач типа Коши, когда условия задаются на сингулярных многообразиях.

Задача K_1. Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\chi > 0$, $|\nu| > |\lambda|$, по граничным условиям:

$$(x-a)^{\nu}(y-b)^{-\mu}u(x,y)\Big|_{\substack{y=a,\\ x=a}} = A_1;$$

$$(y-b)^{-\chi}(x-a)^{\lambda}u(x,y)\Big|_{\substack{y=a,\\ x=a}} = B_1.$$

Решение задачи K_1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Используя интегральное представление (13) и свойства решения, получим $c_1 = A_1$, $c_2 = B_1$.

Подставляя значения c_1, c_2 в (13), имеем решение задачи K_1. Следовательно, доказана следующая

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда задача* K_1 *имеет единственное решение, представимое в виде* (13), *где* $c_1 = A_1$, $c_2 = B_1$.

Задача K_2. Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\chi > 0$, по граничному условию $(y-b)^{-\chi}(x-a)^{\lambda}u(x,y)\Big|_{\substack{x=a,\\ y=b}} = B_2$.

Решение задачи K_2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Используя интегральное представление (16) и свойства решения, имеем $c_2 = B_2$.

Подставляя в (16) данное значение c_2, получим решение задачи K_2. Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда задача* K_2 *имеет единственное решение, представимое в виде* (16), *где* $c_2 = B_1$.

Задача K_3. Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\chi < 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $\delta = -\lambda\mu$, по граничному условию $(x-a)^{\nu}(b-y)^{-\mu}u(x,y)|_{\substack{y=a,\\ x=a}} = A_2$.

Решение задачи K_3. При выполнении условий теоремы 4 и условия $(b-y)^{-\mu}g_2(y)\big|_{y=a} = 0$, используя (17) и свойства решения, имеем $c_1 = A_2$.

Подставляя в (17) данное значение c_1, получим решение задачи K_3. Следовательно, верно следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда задача* K_3 *имеет единственное решение, представимое в виде* (17), *где* $c_1 = A_2$.

Задача K_4**.** Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, по граничному условию $(x-a)^{\nu}(b-y)^{-\mu}u(x,y)\Big|_{\substack{y=b,\\ x=a}} = A_3$.

Решение задачи K_4. Используя интегральное представление (25) и свойства решения при выполнении условий теоремы 6, имеем $c_1 = A_3$.

Подставляя в интегральное представление (25) это значение c_1, получим решение задачи K_4. Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть выполнены условия теоремы* 6. *Тогда задача* K_4 *имеет единственное решение, представимое в виде* (25), *где* $c_1 = A_3$.

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3.—М.: Наука, 1968.—512 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—672 с.
4. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
5. *Джураев А. Д.* Метод сингулярных интегральных уравнений.—М.: Наука, 1987.—415 с.
6. *Джангибеков Г.* О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки.—1989.—Т. 46, № 46.—С. 91–93.
7. *Солдатов А. П., Урбанович Т. М.* Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2011.—№ 17 (112), вып. 24.—С. 165–171.
8. *Плещинский Н.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре.—Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2018.—160 с.
9. *Довгий С. А., Лифанов И. К.* Методы решения интегральных уравнения.—Киев: Наукова думка, 2002.—343 с.
10. *Расолько Г. А.* Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов.—Минск: Изд-во БГУ, 2007.—293 с.
11. *Байков И. В.* Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений.—Пенза: Изд-во ПГУ, 2004.—297 с.
12. *Раджабов Н.* Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения.—Душанбе, 2007.—221 с.
13. *Раджабова Л. Н., Раджабов Н.* Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх- сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх- сингулярными ядрами и их приложения.—Душанбе: Изд-во ТНУ, 2021.—317 с.
14. *Раджабов Н., Раджабова Л. Н.* Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложении.—Germany: LAB LAMBERT Academic Publ., 2012.—502 с.
15. *Раджабова Л. Н., Хушвахтов М. Б.* К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой // Докл. АН Республики Таджикистан.—2018.—Т. 61, № 4.—С. 331–337.
16. *Rajabova L. N., Khushvakhtov M. B.* To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip // Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series.—2019.—Vol. 129, № 4.—P. 67–72.
17. *Хушвахтов М. Б.* О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе // Междунар. науч. журн. «Молодой ученый».—2019.—Т. 287, № 49.—С. 1–4.

Статья поступила 19 октября 2024 г.

Раджабова Лутфия Нусратовна
Таджикский национальный университет,
профессор кафедры математического анализа и теории функций
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: lutfya62@mail.ru
https://orcid.org/0009-0005-8238-9818

Раджабов Нусрат
Таджикский национальный университет,
профессор кафедры математического анализа и теории функций
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: nusrat38@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-8974-6500

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 109–123

ON THE THEORY OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF VOLTERRA-TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH SPECIAL LINES

Rajabova, L. N.[1] and Radjabov, N.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan

E-mail: nusrat38@mail.ru, lutfya62@mail.ru

Abstract. In the rectangle $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ with boundary lines $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ we study a overdetermined system of the Volterra-type integral equations with special lines, which consists of a two-dimensional integral equation and two one-dimensional integral equations. The solution of the overdetermined system of the Volterra-type integral equations with special lines is sought in the class of continuous functions in the rectangle D and vanishing on the lines Γ_1, Γ_2. In the case when the main equation of the studied overdetermined system of integral equations is the first equation of the system and the coefficients of the two-dimensional integral equation are related and not related to each other in a special way, we obtain the conditions of jointness of the equations of the system. In the case when the coefficients of the first equation of the overdetermined system are not related, the solution of the overdetermined system of integral equations is sought in the form of generalized power series. We obtain explicit solutions of the overdetermined system of equations, which, depending on the sign of the coefficients, may contain arbitrary constants, determine the conditions of coexistence of the equations of the system, study the properties of the solutions, set and solve Cauchy-type problems, where the conditions are set on singular manifolds.

Keywords: overdetermined system of equations, Volterra type integral equation, special lines, arbitrary constants.

AMS Subject Classification: 45D05.

For citation: *Rajabova, L. N. and Radjabov, N.* On the Theory of Overdetermined Systems of Volterra-Type Integral Equations with Special Lines, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 109–123 (in Russian). DOI: 10.46698/q2158-4503-2268-b.

References

1. *Muskhelishvili, N. I. Singular Integral Equations, Publ.* 3, Moscow, Nauka, 1968.
2. *Gakhov, F. D. Boundary Value Problems*, Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
3. *Vekua, I. N. Generalized Analytical Functions*, Moscow, Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
4. *Mikhlin, C. G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, New York, Pergamon Press, 1965.
5. *Dzhuraev, A. D. Methods of Singular Integral Equations*, New York, J. Wiley, 1992.
6. *Dzhangibekov, G.* On Some Two-Dimensional Singular Integral Operators, *Mathematical Notes*, 1991, vol. 49, no. 4, pp. 434–436. DOI: 10.1007/BF01158226.
7. *Soldatov, A. P. and Urbanovich, T. M.* A Characteristic Singular Integral Equation with a Cauchy Kernel in the Exceptional Case, Scientific Bulletin of the Belarusian State University. Ser. Mathematics. Physics, 2011, vol. 17 (112), no. 24, pp. 165–171 (in Russian).
8. *Pleshchinsky, N. Singular Integral Equations with a Complex Singularity in the Core*, Kazan, 2018, 160 p. (in Russian).

9. *Dovgiy, C. A. and Lifanov, I. K. Methods for Solving Integral Equations*, Kiev, Publishing House "Naukova Dumka", 2002, 343 p. (in Russian).
10. *Rasolko, G. A. Numerical Solution of Some Singular Integral Equations with Cauchy Kernel by Orthogonal Polynomial Method*, Minsk, BSU, 2007, 293 p. (in Russian).
11. *Boykov, I. V. Approximate Methods for Solving Singular Integral Equations*, Penza, Publishing House of PSU, 2004, 297 p. (in Russian).
12. *Rajabov, N. Integral Equations of Volterra types with Fixed Boundary and Internal Singular and Super-Singular Kernels and Their Applications*, Dushanbe, 2007, 221 p. (in Russian).
13. *Rajabova, L. N. and Rajabov, N. Redefined Linear System of Integral Equations and Singular, Super-Singular Volterra Type Integral Equations of the Third Kind with Logarithmic and Super-Singular Kernels and Their Applications*, Dushanbe, Tajik National University, 2021, 320 p. (in Russian).
14. *Rajabov, N. and Rajabova, L. N. Introduction to the Theory of Multidimensional Integral Equations of the Type Volterra with Fixed Singular and Super-Singular Kernels and Their Application*, Lambert Academic Publ., 2011, 502 p. (in Russian).
15. *Radjabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B.* On the Theory of Special Two-Dimensional Integral Equations of the Type Volterra with a Special and Weakly-Special Line on the Strip in the Case when the Parameters of the Equation are not Related, *Reports of the Academy of Sciences of Tajikistan*, 2018, vol. 61, no. 4, pp. 331–337 (in Russian).
16. *Rajabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B.* To the Theory of Non-Model Two-Dimensional Integral Equations of Volterra Type with a Strongly Singular and Weakly Singular Line on a Strip, *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*, 2019, vol. 129, no. 4, pp. 67–72.
17. *Khushvakhtov, M. B.* On Some Cases of Non-Model Two-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with a Strongly-Singular and Weakly-Singular Line on the Strip, *International Scientific Journal "Young Scientist"*, 2019, vol. 287, no. 49, pp. 1–4 (in Russian).

Received October, 19, 2024

Lutfya N. Rajabova
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions,
E-mail: lutfya62@mail.ru
https://orcid.org/0009-0005-8238-9818

Nusrat Rajabov
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions,
E-mail: nusrat38@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-8974-6500