Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 72–85

УДК 514.12, 514.13
DOI 10.46698/m2064-2286-7424-l

ТЕОРЕМЫ ТИПА КЕЙСИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А. В. Костин[1]

[1] Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423812, Набережные Челны, пр. Мира, 68/19 (1/18)

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Аннотация. В статье исследуются связи между теоремами Кейси и их обобщениями на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Наряду с теоремами типа Кейси об окружностях и «касательных расстояниях» между ними рассматриваются преобразования Лагерра, сохраняющие такие расстояния. С использованием неевклидовой геометрии описываются некоторые связи между этими преобразованиями. В теореме Кейси, являющейся одним из обобщений теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике, рассматриваются четыре окружности, касающиеся одной окружности на евклидовой плоскости. Вместо длин сторон и диагоналей берутся длины общих касательных соответствующих пар окружностей. Эта теорема легко обобщается на большее количество окружностей. Кроме того, у нее существуют различные аналоги в пространствах постоянной кривизны. На псевдоевклидовой плоскости также можно рассматривать аналоги теоремы Кейси и ее обобщений. Теоремы такого типа на псевдоевклидовой плоскости являются непосредственным следствием соответствующих евклидовых теорем. В работе строится соответствие между конфигурациями окружностей на евклидовой плоскости и конфигурациями окружностей мнимого радиуса на псевдоевклидовой плоскости. При этом соотношению из евклидовой геометрии соответствует то же самое соотношение в псевдоевклидовой геометрии. Преобразования Лагерра на евклидовой плоскости воздействуют на ориентированные прямые. При этом семейство прямых, огибающее окружность, под воздействием преобразований Лагерра переходит в аналогичное семейство. Если прямая принадлежит двум таким семействам, то при преобразованиях Лагерра сохраняется длина отрезка прямой между точками касания с окружностями. С использованием изотропной проекции преобразования Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях можно рассматривать как преобразования, индуцированные движениями трехмерного псевдоевклидова пространства. Для описания свойств однопараметрических подгрупп группы Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях используются геометрии Лобачевского и де Ситтера.

Ключевые слова: теорема Птолемея, теорема Кейси, теорема Фурмана, преобразования Лагерра, пространство постоянной кривизны.

AMS Subject Classification: 51M09, 53B30.

Образец цитирования: *Костин А. В.* Теоремы типа Кейси и преобразования Лагерра // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 72–85. DOI: 10.46698/m2064-2286-7424-l.

1. Введение

В теореме Птолемея утверждается, что произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений длин противоположных сторон. Эта теорема имеет многочисленные обобщения и на самой евклидовой плоскости по числу сторон вписанного многоугольника, по типу фигур, участвующих в конфигурациях. Существуют пространственные обобщения этой теоремы, а также различные ее неевклидовы аналоги.

Простейшим обобщением по числу сторон вписанного многоугольника является теорема Фурмана.

Теорема 1. *На евклидовой плоскости для выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанного в окружность, имеет место соотношение*

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6$$

$$+A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6.$$

Слева в этом равенстве стоят длины диагоналей, соединяющих противоположные вершины шестиугольника. Справа в трех слагаемых стоят длины таких диагоналей и сторон, не имеющих с ними общих точек, в двух — длины трех сторон, взятых через одну. Гиперболические аналоги теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике с разной степенью общности независимо доказали Т. Кубота [1] в 1912 г. и П. А. Широков [2] в 1924 г. Версия этой теоремы в релятивистской модели аналитической гиперболической геометрии получена в работе А. Унгара (A. Ungar) [3] в 2023 г. В 1947 г. Й. Хаантьес [4] доказал гиперболический аналог неравенства Птолемея. Опубликованная в 2024 г. статья М. Гомеса и Ф. Мемоли [5] посвящена рассмотрению неравенства Птолемея в CAT-пространствах.

В других обобщениях теоремы Птолемея вершины вписанных в окружность многоугольников заменяются на окружности, касающиеся этой окружности, а длины сторон и диагоналей — на длины отрезков общих касательных соответствующих окружностей. При этом, если две окружности касаются основной окружности одинаково — обе внутренним или обе внешним образом, то берется отрезок внешней касательной к этим окружностям, если же по-разному, то берется отрезок внутренней касательной. Первую теорему такого типа доказал Джон Кейси в 1866 г. (см. [6, 7]). Многомерное евклидово обобщение теоремы Кейси (в других транслитерациях Кези или Кэзи) получили Н. В. Абросимов и В. В. Асеев в 2018 г. в статье [8].

Гиперболический аналог теоремы Кейси получен Н. В. Абросимовым и Л. А. Микайыловой [9] в 2015 г. Различные обобщения последней теоремы для шести окружностей или циклов другого вида, касающихся линии постоянной кривизны на плоскости Лобачевского, получены в [10] и [11].

Интерпретация гиперболического аналога теоремы Кейси (Кези) как теоремы о четырехугольнике, вписанном в изотропную сферу псевдогиперболического пространства, дана в [12]. Там же приведена интерпретация евклидовой теоремы как теоремы о четырехугольнике, вписанном в сферу нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства (трехмерного пространства Минковского). Необходимая информация о неевклидовых геометриях имеется в монографиях Б. А. Розенфельда [13] и [14].

Основной целью работы является доказательство теоремы Кейси и ее обобщения для шести псевдоевклидовых окружностей на псевдоевклидовой плоскости и установление взаимосвязей между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

2. Теоремы типа Кейси на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях

В условиях таких теорем можно снабдить окружности и касательные ориентацией и брать касательные в соответствии с согласованной ориентацией. Длину отрезка общей касательной будем называть также касательным расстоянием между окружностями.

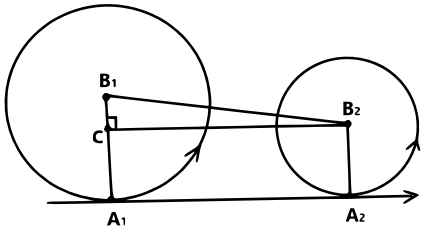

Рис. 1. Одинаковая ориентация окружностей.

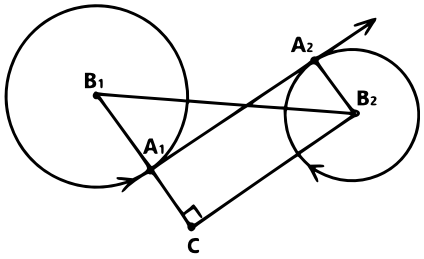

Рис. 2. Разная ориентация окружностей.

Если окружность с центром в точке $B_1(a_1, b_1)$ имеет радиус c_1 (рис. 1 и рис. 2), а окружность с центром в точке $B_2(a_2, b_2)$ имеет (относительный) радиус c_2 на евклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то длина отрезка общей касательной этих окружностей будет удовлетворять условию $|A_1A_2|^2 = |B_1B_2|^2 - |B_1C|^2$. Если у отрицательно ориентированной окружности считать радиус отрицательным, т. е. приписать его длине знак минус, то в обоих случаях имеем: $|A_1A_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (c_1 - c_2)^2$. Вместо ориентации можно рассматривать окраску окружностей в один из двух цветов и у одинаково окрашенных окружностей брать отрезок внешней касательной, у окрашенных по-разному — внутренней (см. [15]). Из последней работы заимствован удачный термин в названии статьи.

Теорема Кейси о четырех окружностях, касающихся одной окружности на евклидовой плоскости, с использованием изотропной проекции интерпретируется как теорема Птолемея о четырехугольнике, вписанном в сферу нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства [12]. На рис. 3 с использованием такой интерпретации показано, как определяются касательные расстояния между двумя окружностями, касающимися одной окружности, в зависимости от способов касания с нею. Все эти расстояния равны расстоянию S_1S_2.

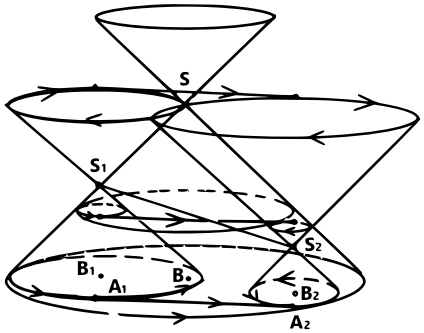

Рис. 3. Сечения изотропных конусов евклидовыми плоскостями.

Аналогичную интерпретацию можно дать для псевдоевклидова аналога этой теоремы. Это сводит доказательство псевдоевклидова аналога к доказательству евклидовой

теоремы. Такая интерпретация позволяет установить и наглядные геометрические связи между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Для псевдоевклидовой плоскости, структура которой задается индефинитной квадратичной формой, будут использоваться понятия метрика, длина, расстояние и т.д., аналогично и для псевдоевклидова пространства. Это не должно приводить к недоразумениям.

На псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 - dz^2$ в декартовых координатах будем рассматривать окружности с мнимыми радиусами. Пусть $O_1(a_1, c_1)$ — координаты центра одной псевдоевклидовой окружности, $b_1 \cdot i$, где $i^2 = -1$, — ее радиус. Аналогично, $O_2(a_2, c_2)$ и $b_2 \cdot i$ — у другой окружности. Пусть T_1, T_2 — точки касания общей касательной прямой с данными окружностями (рис. 4). Проведем прямую T_1T параллельно прямой O_1O_2. В треугольнике T_1T_2T имеем: $|T_1T_2|^2 - |T_2T|^2 = |T_1T|^2$. Отсюда

$$|T_1T_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (c_1 - c_2)^2.$$

Это квадрат расстояния между точками с координатами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = da^2 + db^2 - dc^2$.

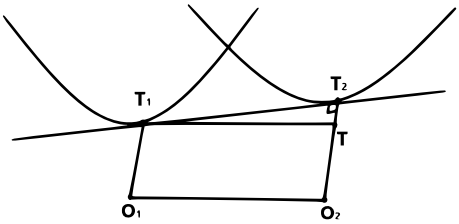

Рис. 4. Касательная к псевдоевклидовым окружностям.

Псевдоевклидовы окружности тоже можно ориентировать по часовой стрелке или против нее. То есть, если на одной ветви (полуокружности) ориентация слева направо, то на другой ветви этой окружности — наоборот. У одинаково ориентированных окружностей берется касательная к однотипным ветвям (верхним или нижним одновременно), у ориентированных окружностей с разной ориентацией — касательная к разным ветвям. Если плоскость с рассматриваемыми псевдоевклидовыми окружностями поместить в трехмерное псевдоевклидово пространство с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$, то точки с координатами $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ и $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$, $z_2 = c_2$ будут вершинами изотропных конусов, высекающих данные окружности из плоскости $y = 0$.

Длина отрезка общей касательной псевдоевклидовых окружностей в плоскости Oxz с центрами $O_1(a_1, c_1)$, $O_2(a_2, c_2)$ и радиусами $b_1 \cdot i, b_2 \cdot i$ соответственно совпадает с длиной отрезка общей касательной евклидовых окружностей с центрами $B_1(a_1, b_1)$, $B_2(a_2, b_2)$ и радиусами c_1, c_2 соответственно в плоскости Oxy с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Равенство длин общих касательных рассматриваемых евклидовых и псевдоевклидовых окружностей является частным случаем более общего факта.

Лемма 1. *Пусть в псевдоевклидовом пространстве зафиксированы два изотропных конуса, и плоскости пересекают конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям. Тогда длины общих касательных пар окружностей* (*при соответствующем выборе этих касательных*) *будут равны.*

$\lhd$ Пусть зафиксированы изотропные конусы с вершинами S_1 и S_2 (рис. 5). Пусть общая касательная плоскость этих конусов пересекает евклидову плоскость по прямой A_1A_2. Эта касательная плоскость является полуевклидовой. Расстояния по прямой A_1A_2 вещественные, по прямой A_1S_1 — нулевые. Плоскости, пересекающие эти изотропные конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям, пересекают плоскость $A_1A_2S_1$

по общим касательным к этим окружностям. При этом точки касания будут лежать на изотропных образующих A_1S_1, A_2S_2. Вследствие полуевклидовости плоскости $A_1A_2S_1$ длины отрезков общих касательных (таких, например, как T_1T_2) будут равны их проекциям параллельно указанным образующим на прямую A_1A_2. ▷

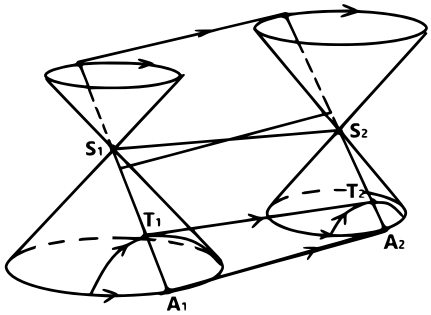

Рис. 5. Изотропные конусы с общей касательной плоскостью.

Если изотропная плоскость пересекает эти конусы по параболам, то длина отрезка их общей касательной также будет равна длине отрезка A_1A_2, но в данной работе нас интересуют сечения конусов именно евклидовыми и псевдоевклидовыми плоскостями.

Теорема 2. *Пусть на псевдоевклидовой плоскости окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 мнимого радиуса касаются в указанном порядке одной окружности ω мнимого радиуса. Пусть $t_{ij}-$ длина отрезка общей касательной окружностей ω_i, ω_j, взятой с учетом ориентации окружностей. Тогда имеют место соотношения:*

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}$$

и

$$t_{14} \cdot t_{25} \cdot t_{36} = t_{12} \cdot t_{36} \cdot t_{45} + t_{12} \cdot t_{34} \cdot t_{56} + t_{23} \cdot t_{14} \cdot t_{56} + t_{23} \cdot t_{45} \cdot t_{16} + t_{34} \cdot t_{25} \cdot t_{16}.$$

◁ Первое соотношение — теорема Кейси, второе обобщает ее и теорему Фурмана (см. [10, 11]) на шесть окружностей, касающихся одной окружности. Доказательство следует из общей интерпретации этих теорем из евклидовой и псевдоевклидовой геометрий как теорем о многоугольниках, вписанных в изотропную сферу трехмерного псевдоевклидова пространства. Действительно, если псевдоевклидовы окружности касаются, то при изотропной проекции вершины соответствующих им конусов в трехмерном псевдоевклидовом пространстве соединяет вектор нулевой длины. Значит, шести окружностям, касающимся одной окружности ω, будут соответствовать шесть вершин конусов, лежащих на одном изотропном конусе, соответствующем окружности ω. Касательным расстояниям между окружностями будут соответствовать расстояния между точками одного изотропного конуса. Если всю конфигурацию пересечем евклидовой плоскостью, то в сечении получим набор евклидовых окружностей, касающихся одной евклидовой окружности. Расстояниям между вершинами конусов будут соответствовать длины отрезков общих касательных к этим окружностям. При этом соотношение между отрезками псевдоевклидовой плоскости станет эквивалентно аналогичному соотношению на евклидовой плоскости, что и завершает доказательство. ▷

3. Преобразования Лагерра

Преобразования Лагерра на евклидовой плоскости рассматривали различные авторы. Обширная библиография по геометрии Лагерра имеется в [16]. Преобразования Лагерра и их аналоги в различных пространствах являются преобразованиями многообразий фигур этих пространств. Допуская определенную вольность речи, будем просто говорить о преобразованиях Лагерра рассматриваемых пространств. В двумерном случае эти преобразования воздействуют на (ориентированные) прямые. Семейства прямых, огибающие окружности, при этом переводятся в аналогичные семейства. Если прямая принадлежит двум таким семействам, то при преобразованиях сохраняется длина отрезка прямой между точками касания. А. П. Широков [17] предложил следующий подход к построению группы Лагерра, точнее, ее алгебры Ли, на E^2 с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$. На евклидовой окружности

$$\begin{cases} x = \cos(u^1), \\ y = \sin(u^1), \end{cases}$$

рассматриваются векторные поля

$$\frac{d}{du^1}, \quad \cos(u^1)\,\frac{d}{du^1}, \quad \sin(u^1)\,\frac{d}{du^1},$$

которые, в свою очередь, порождаются операторами группы вращений и параллельных переносов в направлении координатных осей. Затем строятся их полные $V_1 - V_3$ и вертикальные $V_4 - V_6$ лифты в касательное расслоение окружности:

$$\begin{gathered} V_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad V_2 = \cos(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^1} - u^2\sin(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \quad V_3 = \sin(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2\cos(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \\ V_4 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad V_5 = \cos(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \quad V_6 = \sin(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь, как обычно, отождествляются векторные поля и соответствующие дифференциальные операторы. Ориентированная прямая, имеющая направление $\overrightarrow{e}(\cos(u^1), \sin(u^1))$, задается нормальным уравнением

$$-x\sin(u^1) + y\cos(u^1) - u^2 = 0.$$

Пусть вещественные числа a, b, c фиксированы, а u^1, u^2 меняются. Тогда семейство прямых

$$-a\sin(u^1) + b\cos(u^1) - u^2 = c$$

огибает цикл (окружность) с центром (a, b) и радиусом c. Преобразования прямых индуцируют преобразования циклов. В переменных a, b, c соответствующие операторы примут следующий вид:

$$\begin{gathered} V_1 = -b\,\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial b}, \quad V_2 = -c\,\frac{\partial}{\partial a} - a\frac{\partial}{\partial c}, \quad V_3 = -c\,\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial c}, \\ V_4 = -\frac{\partial}{\partial c}, \quad V_5 = \frac{\partial}{\partial b}, \quad V_6 = -\frac{\partial}{\partial a}. \end{gathered} \tag{2}$$

Аналогично, зададим прямую на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 - dz^2$ нормальным уравнением:

$$-x\sinh(u^1) + z\cosh(u^1) - u^2 = 0.$$

Базис алгебры Ли группы преобразований Лагерра на псевдоевклидовой плоскости может быть задан следующим образом [18]:

$$\begin{gathered} W_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad W_2 = \cosh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \sinh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \\ W_3 = \sinh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \cosh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \quad W_4 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \\ W_5 = \cosh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}, \quad W_6 = \sinh(u^1)\,\frac{\partial}{\partial u^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Как и выше, векторные поля $W_1 - W_3$ в (3) являются полными лифтами векторных полей

$$\frac{d}{du^1}, \quad \cosh(u^1)\frac{d}{du^1}, \quad \sinh(u^1)\frac{d}{du^1},$$

заданных на псевдоевклидовой окружности, в ее касательное расслоение, поля $W_4 - W_6$ — их вертикальными лифтами.

Пусть опять вещественные числа a, b, c фиксированы, а u^1, u^2 меняются. Тогда прямые

$$-a\sinh(u^1) + c\cosh(u^1) - u^2 = b$$

касаются псевдоевклидовой окружности с центром (a, c) и радиусом $b \cdot i$. Преобразования псевдоевклидовых прямых, индуцированные операторами $W_1 - W_6$, порождают преобразования циклов. В переменных a, b, c соответствующие операторы примут следующий вид:

$$\begin{gathered} W_1 = c\,\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial c}, \quad W_2 = -b\,\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial b}, \quad W_3 = b\,\frac{\partial}{\partial c} + c\frac{\partial}{\partial b}, \\ W_4 = \frac{\partial}{\partial b}, \quad W_5 = \frac{\partial}{\partial c}, \quad W_6 = -\frac{\partial}{\partial a}. \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда, сравнивая (2) и (4), имеем

$$\begin{aligned} W_1 &= -V_2, \quad W_2 = V_1, \\ W_3 &= -V_3, \quad W_4 = V_5, \\ W_5 &= -V_4, \quad W_6 = V_6. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы групп преобразований совпадают с точностью до порядка следования и знака. Отличие в знаке для операторов означает, что они порождают однопараметрические группы трансляций или вращений в противоположных направлениях. Полученное соответствие позволяет установить взаимосвязи между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

3.1 Преобразования Лагерра, индуцированные гиперболическими винтовыми движениями. Рассмотрим однопараметрические группы преобразований, порождаемые оператором $W_3 + \mu W_6$, где μ — некоторая вещественная константа. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве этот оператор порождает однопараметрическую группу винтовых движений гиперболического типа. Покажем, как связаны действия соответствующих преобразований Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

На евклидовой плоскости соответствующий оператор имеет следующий вид:

$$-\sin(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} + \big(-u^2\cos(u^1) + \mu\sin(u^1)\big)\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Траектории в многообразии прямых евклидовой плоскости задаются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = -\sin(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = -u^2\cos(u^1) + \mu\sin(u^1). \end{cases}$$

Отсюда

$$u^2 = -\mu\sin(u^1)\ln\left(\operatorname{tg}\frac{u^1}{2}\right) + C\sin(u^1).$$

Здесь C — константа интегрирования. Из системы уравнений

$$\begin{cases} -x\sin(u^1) + y\cos(u^1) = -\mu\sin(u^1)\ln\left(\operatorname{tg}\frac{u^1}{2}\right) + C\sin(u^1), \\ -x\cos(u^1) - y\sin(u^1) = -\mu\cos(u^1)\ln\left(\operatorname{tg}\frac{u^1}{2}\right) - \mu + c\cos(u^1), \end{cases}$$

находится огибающая этого однопараметрического семейства прямых:

$$\begin{cases} x = \mu\left(\ln(\operatorname{tg}\frac{u^1}{2}) + \cos(u^1)\right) - C, \\ y = \mu\sin(u^1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что прямая на евклидовой плоскости под действием однопараметрической группы гиперболических винтовых движений скользит по трактрисе с параметром μ. Базой трактрисы служит ось Ox. Преобразования псевдоевклидова пространства переводят изотропный конус с вершиной в точке $(x = a, y = b, z = c)$ в изотропный конус. Касательная плоскость к изотропному конусу переходит в касательную плоскость к его образу. Образ прямой, по которой касательная плоскость пересекается с евклидовой плоскостью Oxy (псевдоевклидовой плоскостью Oxz), определяется пересечением образа касательной плоскости с евклидовой (соответственно, псевдоевклидовой) плоскостью. Это позволяет связать геометрические характеристики орбит однопараметрических подгрупп группы Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Пусть прямая n на евклидовой плоскости касается огибающей в точке N. Построим изотропный конус, касающийся прямой в этой же точке. Отрезок NP прямой от точки касания до оси Ox имеет длину $|\mu|$. Плоскость Oxy пересекает конус по евклидовой окружности. Плоскость Oxz пересекает его по псевдоевклидовой окружности. В плоскости Oxz касательная плоскость к конусу высекает псевдоевклидову прямую m, касающуюся псевдоевклидовой окружности и огибающей семейства прямых, полученных из псевдоевклидовой прямой m под действием однопараметрической группы, в точке M. Поскольку касательная плоскость к конусу полуевклидова, в треугольнике MNP сторона MN лежит на изотропной прямой, и длина отрезка MP будет равна длине отрезка NP (рис. 6). Это означает, что на псевдоевклидовой плоскости Oxz прямая также будет скользить по линии, длина отрезка касательной которой до оси Ox постоянна и равна $|\mu|$.

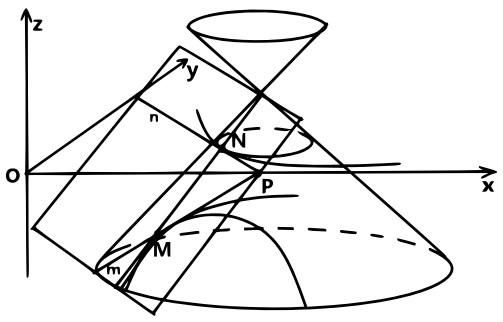

Рис. 6. Связь преобразований.

Аналитически выражение для орбит можно найти аналогично предыдущему. Оператор однопараметрической группы преобразований имеет вид

$$\sinh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} + \left(u^2\cosh(u^1) + \mu\sinh(u^1)\right)\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Переменные u^1, u^2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = \sinh(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = u^2\cosh(u^1) + \mu\sinh(u^1). \end{cases} \tag{5}$$

Для u^2 из (5) получаем следующее выражение через u^1:

$$u^2 = \mu\sinh(u^1)\ln\left(\tanh\frac{u^1}{2}\right) + C\sinh(u^1).$$

Далее, из системы уравнений

$$\begin{cases} -x\sinh(u^1) + y\cosh(u^1) = \mu\sinh(u^1)\ln\left(\tanh\frac{u^1}{2}\right) + C\sinh(u^1), \\ -x\cosh(u^1) + y\sinh(u^1) = \mu\cosh(u^1)\ln\left(\tanh\frac{u^1}{2}\right) + \mu + C\cosh(u^1), \end{cases}$$

находим параметрические уравнения орбит — линий, по которым скользят псевдоевклидовы прямые под действием однопараметрической группы преобразований:

$$\begin{cases} x = -\mu\left(\ln(\tanh\frac{u^1}{2}) + \cosh(u^1)\right) - C, \\ y = -\mu\sinh(u^1). \end{cases}$$

У этого псевдоевклидова аналога трактрисы база и касательная являются прямыми одного типа. Кроме базы имеется еще изотропная асимптота. Кривая не имеет особых точек.

Хорошо известно, что на поверхности, полученной вращением трактрисы в евклидовом пространстве, локально реализуется геометрия Лобачевского. При гиперболическом вращении этого псевдоевклидова аналога трактрисы относительно ее базы получается поверхность, являющаяся одним из аналогов псевдосферы и глобально изометричная плоскости Лобачевского. Некоторые свойства других псевдоевклидовых аналогов псевдосферы отмечены в статье [19].

3.2 Преобразования Лагерра, индуцированные изотропными винтовыми движениями. Рассмотрим однопараметрические группы преобразований, порождаемые оператором $W_1 + W_2 + \mu\cdot(W_4 + W_5)$. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве этот оператор порождает однопараметрическую группу винтовых движений, ось вращения и вектор переноса у которых изотропны. Покажем, что и в этом случае преобразования Лагерра, индуцированные этим оператором на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях, будут иметь похожие геометрические свойства. На псевдоевклидовой плоскости соответствующий оператор имеет следующий вид:

$$\left(1+\cosh(u^1)\right)\frac{\partial}{\partial u^1} + \left(u^2\sinh(u^1) + \mu\left(1+\cosh(u^1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Пусть t — групповой параметр однопараметрической группы преобразований, порождаемой данным оператором. Переменные u^1, u^2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = 1 + \cosh(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = u^2\sinh(u^1) + \mu\left(1+\cosh(u^1)\right). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить, что псевдоевклидова прямая под действием преобразований, порожденных рассматриваемым оператором, будет скользить по псевдоевклидовой окружности

$$(x-\mu)^2-(z-C)^2=-C^2. \tag{6}$$

Псевдоевклидова окружность также является одним из аналогов трактрисы. У нее отрезок касательной до изотропной прямой имеет постоянную длину. Для интерпретации параметра t однопараметрической группы преобразований можно привлечь геометрию так называемой идеальной области плоскости Лобачевского, локально несущей геометрию де Ситтера, следующим образом. Введем на плоскости Oxz дополнительно к псевдоевклидовой метрику $ds^2=\frac{dx^2-dz^2}{z^2}$. В качестве абсолюта в такой модели идеальной области выступает ось абсцисс. Метрика в ней конформна псевдоевклидовой метрике. Эллиптические прямые плоскости де Ситтера в такой модели изображаются псевдоевклидовыми окружностями мнимого радиуса с центром на абсолюте, изотропные прямые — окружностями нулевого радиуса с центром на абсолюте, гиперболические прямые — окружностями вещественного радиуса и прямыми, ортогональными абсолюту, орициклы — окружностями, касающимися абсолюта и прямыми, параллельными абсолюту. Каждая псевдоевклидова полуплоскость, границей которой служит абсолют, покрывает всю идеальную область плоскости Лобачевского за исключением одной изотропной прямой. Псевдоевклидова окружность (6) станет орициклом плоскости де Ситтера. Пусть псевдоевклидова прямая касается орицикла в точке M (рис. 7). Если угол u^1, задающий направляющий вектор прямой, при смещении прямой по окружности получает некоторое приращение, то такое же приращение получает угол, задающий направление псевдоевклидовой нормали этой прямой. Под углом, точнее под величиной угла, между двумя пространственно подобными или времениподобными прямыми здесь понимается величина гиперболического угла — численное значение площади сектора гиперболы с единичными полуосями на евклидовой плоскости. Величина угла LKM равна u^1, величина вписанного угла NSL вдвое меньше, т. е. $u^1/2$.

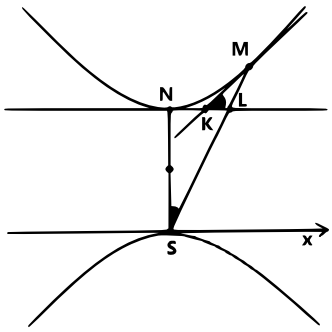

Рис. 7. Орицикл плоскости де Ситтера.

На рис. 7 касательная в южном полюсе S псевдоевклидовой окружности принята за абсолют плоскости де Ситтера. Псевдоевклидовой инверсией (см. [14]) с центром в точке S переведем дугу NM орицикла в отрезок NL. Такая инверсия является движением метрики де Ситтера. Далее воспользуемся свойством элементарной геометрии псевдоевклидовой плоскости. В треугольнике NSL катет $|NL|=|NS|\cdot\tanh(NSL)$. В метрике де Ситтера отношение $\frac{|NL|}{|NS|}$ равно длине дуги орицикла NL. Для геометрической характеристики группового параметра t обратимся к уравнению

$$\frac{du^1}{dt}=1+\cosh(u^1),$$

характеризующему вращение прямой, касающейся псевдоевклидовой окружности. Из этого уравнения получим

$$\tanh\frac{u_0^1}{2} - \tanh\frac{u^1}{2} = t,$$

где $u_0^1 = u^1(0)$. А отсюда следует, что групповой параметр однопараметрической группы, индуцированной оператором группы винтовых движений с изотропной осью, можно интерпретировать как длину дуги орицикла идеальной области плоскости Лобачевского, локально несущей геометрию де Ситтера.

Теперь нетрудно получить геометрическую характеристику орбит соответствующих преобразований на евклидовой плоскости, не прибегая к интегрированию. На псевдоевклидовой плоскости Oxz прямая скользит по окружности мнимого радиуса. Такой окружности при изотропной проекции соответствует изотропный конус с вершиной в точке с координатами (μ, C, C). Преобразования однопараметрической группы индуцируют преобразования изотропных конусов и их касательных плоскостей, высекающих прямые в рассматриваемых евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Эти конусы и их касательные плоскости смещаются, оставаясь касательными к конусу с вершиной в точке (μ, C, C). Значит, в евклидовой плоскости Oxy прямая будет смещаться, оставаясь касательной к окружности с центром в точке $(x = \mu,\ y = C)$ и радиусом C.

Групповому параметру t можно дать интерпретацию аналогично предыдущему случаю, но уже с использованием метрики Лобачевского. В качестве абсолюта берется касательная прямая к евклидовой окружности, являющейся орбитой. Окружность в этом случае станет орициклом плоскости Лобачевского, а групповой параметр истолковывается как длина дуги орицикла плоскости Лобачевского.

4. Заключительные замечания

Для истолкования преобразований Лагерра, индуцированных другими операторами, также можно привлечь гиперболическую геометрию. В частности, можно показать, что при преобразованиях, индуцированных оператором однопараметрической группы эллиптических вращений, псевдоевклидова прямая смещается по другому псевдоевклидову аналогу трактрисы. Этот аналог может служить меридианом псевдоевклидовой поверхности вращения, являющейся продолжением псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Связь псевдосферических поверхностей Миндинга и их псевдоевклидовых продолжений с поверхностями в трехмерном гиперболическом пространстве описана в [20].

Используя интерпретацию теорем о циклах гиперболической плоскости и касательных расстояниях между ними как теорем о вписанных многоугольниках в сферы псевдогиперболического пространства, можно установить взаимосвязи между преобразованиями Лагерра в пространствах ненулевой постоянной кривизны. Приведенные в работе [11] взаимосвязи между евклидовыми и гиперболическими теоремами о циклах и касательных расстояниях допускают дальнейшие обобщения. В частности, теоремы типа Кейси, в которых вместо отрезков общих касательных прямых рассматриваются дуги касательных орициклов можно обобщить на другие циклы плоскости Лобачевского. Из неравенства Птолемея в гиперболической геометрии также можно получить ряд наглядно интерпретируемых следствий. Одним из следствий является аналог теоремы Помпею о том, что из трех отрезков, соединяющих произвольную точку M плоскости с вершинами правильного треугольника ABC , можно составить треугольник. Если точка M

лежит на описанной окружности треугольника ABC, то в евклидовом случае треугольник, составленный из отрезков MA, MB, MC, вырождается. На плоскости Лобачевского, в отличие от этого, треугольник не вырождается, а лишь оказывается вписанным не в окружность, а в орицикл.

Литература

1. *Kubota T.* On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry // Science Reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, Astronomy.—1912.—Vol. 2.—P. 131–156.
2. *Широков П. А.* Этюды по геометрии Лобачевского // Изв. Физ-мат. общества при КГУ. Сер. 2.—1924.—Т. 24, № 1.—С. 26–32.
3. *Ungar A. A.* Ptolemy's theorem in the relativistic model of analitic hyperbolic geometry // Symmetry.—2023.—Vol. 15, № 3.—Article no. 649. DOI: 10.3390/sym15030649.
4. *Haantjes J.* A characteristic local property of Geodesies in certain metric spaces // Proc. Akad. Wetensch.—Amsterdam, 1947.—Vol. 50.—P. 496–508.
5. *Gómez M., Mémoli F.* The four point condition: An elementary tropicalization of Ptolemy's inequality // Amer. Math. Monthly.—2024.—Vol. 131, № 3.—P. 187–203. DOI: 10.1080/00029890.2023.2285695.
6. *Casey J.* A Seqyel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples / Classic Reprint.—London: Forgotten Books, 2012.
7. *Maehara H., Martini H.* Casey's theorem // Circles, Spheres and Spherical Geometry.—Cham: Birkhauser, 2024.—P. 261–277.—(Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher). DOI: 10.1007/978-3-031-62776-7_13.
8. *Abrosimov N. V., Aseev V. V.* Generalizations of Casey's theorem for higher dimensions // Lobachevskii J. Math.—2018.— Vol. 39.—P. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
9. *Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A.* Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сиб. электрон. мат. изв.—2015.—Т. 12.—С. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
10. *Костин А. В.* Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сиб. электрон. мат. изв.—2022.—Т. 19, № 2.—С. 404–414. DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
11. *Костин А. В.* Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, № 4.—С. 58–67. DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.
12. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сиб. электрон. мат. изв.—2016.—Т. 13.—С. 242–251. DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
13. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства.—М.: Ленанд, 2021, 552 с.
14. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства.—М.: Ленанд, 2021, 672 с.
15. *Maehara H., Martini H.* Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems // Results Math.—2018.—Vol. 74.—Art. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
16. *Bobenko A. I., Lutz C. O. R., Pottmann H., Techter J.* Non-Euclidean Laguerre Geometry and Incircular Nets.—Cham: Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-81847-0_1.
17. *Широков А. П.* О группе Лагерра и ее аналогах в релятивной линейчатой геометрии плоскости // Движения в обобщенных пространствах.—Рязань: Рязанский гос. пед. ин-т, 1985.—С. 25–30.
18. *Шустова К. П.* Преобразования Лагерра в псевдоевклидовом пространстве и геометрия Лобачевского: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Казань, 1994.
19. *Костин А. В.* Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности // Изв. вузов. Матем.—2021.—Т. 65, № 6.—С. 25–34. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-6-25-34.
20. *Костин А. В.* Задача о тени и поверхности постоянной кривизны // Сиб. электрон. мат. изв.—2023.—Т. 20, № 1.—С. 150–164. DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Статья поступила 20 декабря 2024 г.

Костин Андрей Викторович
Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского)
федерального университета,
доцент кафедры математики,
РОССИЯ, 423812, Набережные Челны, пр. Мира, 68/19 (1/18)
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5353-6138

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 72–85

CASEY TYPE THEOREM AND LAGUERRE TRANSFORMATIONS

Kostin, A. V.[1]

[1] Kazan Federal University – Naberezhnye Chelny Institute,
68/19 (1/18) Mir Ave., Naberezhnye Chelny 423812, Russia

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Abstract. The article explores the connections between Casey's theorems and their generalizations on the Euclidean and pseudo-Euclidean planes. Along with Casey type theorems about circles and "tangent distances" between them, Laguerre transformations that preserve such distances are considered. Using non-Euclidean geometry, some connections between such transformations are described. In Casey's theorem, which is one of the generalizations of Ptolemy's theorem on an inscribed quadrilateral, four circles are considered that are tangent to one circle on the Euclidean plane. Instead of the lengths of the sides and diagonals, Casey's theorem takes the lengths of the common tangents of the corresponding pairs of circles. This theorem can be easily generalized to a larger number of circles. In addition, this theorem has various analogs and generalizations in spaces of constant curvature. On the pseudo-Euclidean plane, one can also consider analogs of Casey's theorem and its generalizations. Theorems of this type on the pseudo-Euclidean plane are a direct consequence of the corresponding Euclidean theorems. In this paper, a correspondence is constructed between configurations of circles on the Euclidean plane and configurations of circles of imaginary radius on the pseudo-Euclidean plane. In this case, the relationship from Euclidean geometry corresponds to the same relationship in pseudo-Euclidean geometry. Laguerre transformations on the Euclidean plane affect oriented lines. In this case, the family of straight lines enveloping the circle, under the influence of Laguerre transformations, passes into a similar family. If a straight line belongs to two such families, then under Laguerre transformations the length of the straight line segment between the points of contact with the circles is preserved. Using isotropic projection, Laguerre transformations on Euclidean and pseudo-Euclidean planes can be considered as transformations induced by the movements of three-dimensional pseudo-Euclidean space. To describe the properties of one-parameter subgroups of the Laguerre group on the Euclidean and pseudo-Euclidean planes, the Lobachevsky and de Sitter geometries are used.

Keywords: Ptolemy's theorem, Casey's theorem, Fuhrmann's theorem, Laguerre transformations, space of constant curvature.

AMS Subject Classification: 51M09, 53B30.

For citation: *Kostin, A. V.* Casey Type Theorem and Laguerre Transformations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 72–85. (in Russian). DOI: 10.46698/m2064-2286-7424-l.

References

1. *Kubota, T.* On the Extended Ptolemy's Theorem in Hyperbolic Geometry, *Science Reports of the Tohoku University. Ser.* 1*: Physics, Chemistry, Astronomy*, 1912, vol. 2, pp. 131–156.
2. *Shirokov, P. A.* Etudes on the Lobachevskii Geometry, *Izvestia Fiziko-Matematicheskogo Obschestva pri KGU, Ser.* 2, 1924, vol. 24, no. 1, pp. 26–32 (in Russian).
3. *Ungar, A. A.* Ptolemy's Theorem in the Relativistic Model of Analitic Hyperbolic Geometry, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 3, article no. 649. DOI: 10.3390/sym15030649.
4. *Haantjes, J.* A Characteristic Local Property of Geodesies in Certain Metric Spaces, *Proc. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 1947, vol. 50, pp. 496–508.
5. *Gómez, M. and Mémoli, F.* The Four Point Condition: An Elementary Tropicalization of Ptolemy's Inequality, *The American Mathematical Monthly*, 2024, vol. 131, no. 3, pp. 187–203. DOI: 10.1080/00029890.2023.2285695.
6. *Casey, J.* A Seqyel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples, *Classic Reprint, Forgotten Books, London*, 2012.

7. *Maehara, H. and Martini, H.* Casey's Theorem, *Circles, Spheres and Spherical Geometry*, Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher, Cham, Birkhauser, 2024, pp. 261–277. DOI: 10.1007/978-3-031-62776-7_13.
8. *Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V.* Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, pp. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
9. *Abrosimov, N. V. and Mikaiylova, L. A.* Casey's Theorem in Hyperbolic Geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
10. *Kostin, A. V.* On Generalizations of Ptolemy's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 404–414 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
11. *Kostin, A. V.* On Analogues of the Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.
12. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* An Interpretation of Casey's Theorem and Its Hyperbolic Analogue, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 242–251. DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
13. *Rosenfeld, B. A. Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Spaces], Moscow, Lenand, 2021, 552 p. (in Russian).
14. *Rosenfeld, B. A. Mnogomernyye prostranstva* [Multidimensional Spaces], Moscow, Lenand, 2021, 672 p. (in Russian).
15. *Maehara, H. and Martini, H.* Bipartite Sets of Spheres and Casey-Type Theorems, *Results in Mathematics*, 2018, vol. 74, art. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
16. *Bobenko, A. I., Lutz, C. O. R., Pottmann, H. and Techter, J. Non-Euclidean Laguerre Geometry and Incircular Nets*, Cham, Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-81847-0_1.
17. *Shirokov, A. P.* On the Laguerre Group and Its Analogues in the Relative Ruled Geometry of the Plane, *Movements in generalized spaces*, Ryazan, Ryazan State Pedagogical Institute, 1985, pp. 25–30 (in Russian).
18. *Shustova, K. P. Laguerre Transformations in Pseudo-Euclidean Spaces and Lobachevsky Geometry*, Dissertaciia kand. fiz.-mat. nauk, Kazan, 1994 (in Russian).
19. *Kostin, A. V.* Asymptotic Lines on Pseudospheres and the Angle of Parallelisms, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 21–28. DOI: 10.3103/S1066369X21060037.
20. *Kostin, A. V.* Problem of Shadow and Surface of Constant Curvature, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 150–164 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Received December 20, 2024

Andrey V. Kostin
Kazan Federal University – Naberezhnye Chelny Institute,
68/19 (1/18) Mir Ave., Naberezhnye Chelny 423812, Russia,
Associate Professor of the Department of Mathematics
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5353-6138