Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 61–71

УДК 517.9
DOI 10.46698/i7249-6874-2842-b

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОВТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ К ОДНОМУ КЛАССУ НЕФУКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

М. В. Коровина[1], **В. Ю. Смирнов**[2]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
[2] Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: betelgeuser@yandex.ru, vl-smirnov@mail.ru

Аннотация. Одной из фундаментальных проблем аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений является проблема построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях иррегулярных особых точек. В общем виде эта проблема до сих пор не решена. Однако в последние годы для ее решения был создан метод повторного квантования, который позволяет строить асимптотики решений для широкого класса уравнений с иррегулярными особенностями. Данная работа посвящена его развитию. К примеру, этим методом удалось построить асимптотические решения для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечно удаленной особой точки, которая, вообще говоря, является иррегулярной. Метод повторного квантования основан на методах ресургентного анализа, т. е. на применении преобразования Лапласа — Бореля. Он применяется в том случае, когда корни основного символа являются кратными. С помощью результатов этой статьи расширяется класс уравнений с иррегулярными особыми точками, к которым метод повторного квантования применим. А именно к тем уравнениям с иррегулярной особой точкой, для которых асимптотики решений исходного уравнения в образах Лапласа — Бореля содержат экспоненты с показателями в виде полиномов от дробной степени переменной. Применение полученных результатов к уравнению такого типа проиллюстрировано на конкретном примере.

Ключевые слова: асимптотики решений, иррегулярные особенности, ресургентный анализ, преобразование Лапласа — Бореля, метод повторного квантования.

AMS Subject Classification: 34E10.

Образец цитирования: *Коровина М. В., Смирнов В. Ю.* Применение метода повторного квантования к одному классу нефуксовых уравнений // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 61–71. DOI: 10.46698/i7249-6874-2842-b.

1. Введение

Эта статья посвящена развитию метода, который применяется для решения одной из фундаментальных проблем аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно проблеме построения равномерных асимптотик решений уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек. Этот метод называется методом повторного квантования [1, 2].

Проблема построения равномерных асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек была сформулирована Пуанкаре в работах [3, 4].

© 2025 Коровина М. В., Смирнов В. Ю.

В этих работах он рассматривал случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность, а именно задачу для уравнения вида

$$a_n(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + a_{n-1}\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} u(r) + \ldots + a_i(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + \ldots + a_0(r)u(r) = 0, \quad (1)$$

где $a_i(r)$, $i = 0, \ldots, n$, — голоморфные функции. Задача, сформулированная Пуанкаре, заключалась в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности бесконечности в случае, когда $a_n(r) = 1$. Как известно, бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой. Эта задача решена в работах [5, 6] с помощью метода повторного квантования. В общем случае, когда коэффициент $a_n(r)$ является произвольной голоморфной или мероморфной функцией, задача построения асимптотик в окрестности иррегулярной особой точки является более сложной и требует дополнительных возможностей метода повторного квантования.

Данный подход был создан для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек в случае, когда корни основного символа дифференциального оператора являются кратными. Напомним определение основного символа.

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r = 0$. В работе [7] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right) = \left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r)\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^i. \quad (2)$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$, а через $\tilde{a}_i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. В работе [7] найдено минимальное значение k, т. е. минимальный порядок вырождения и коэффициенты этого уравнения. Если в представлении (2) уравнения (1) минимальное $k = -1$, то по классификации особых точек, введенной Пуанкаре, получим, что точка $r = 0$ не является особой. Если $k = 0$, то особая точка $r = 0$ является регулярной. Как известно [8], в окрестности регулярной особой точки асимптотика решения является конормальной. Если $k \in \mathbb{N}$, то особая точка является иррегулярной, в этом случае запишем оператор (2) в виде

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right) = k^n\left(\left(-\frac{1}{k}\,r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r)\frac{1}{k^{n-i}}\left(-\frac{1}{k}\,r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^i\right).$$

Основным символом дифференциального оператора $H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)$ является функция

$$H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}}\,p^i.$$

В случае, когда основной символ имеет только простые корни, асимптотики решений в окрестности особых точек были получены в работе [9].

Однако методы из [9] оказались неприменимыми в ситуации кратных корней, кроме случая уравнений второго порядка. В работе [10] вопрос о построении асимптотик решений для уравнения второго порядка с произвольными голоморфными коэффициентами решен.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования. Суть этого метода состоит в том, что делается преобразование Лапласа — Бореля и доказывается теорема о бесконечной продолжимости решений полученного уравнения (для обыкновенных дифференциальных уравнений это доказано в [11]). Далее еще раз применяется преобразование Лапласа — Бореля и для итогового уравнения строятся асимптотики, которые позволяют найти асимптотики исходного уравнения. Иными словами, суть метода повторного квантования состоит в том, что преобразование Лапласа — Бореля делается два раза. Т. е. сдвинув корень основного символа p_j с помощью экспоненциальной подстановки в точку ноль, делается преобразование Лапласа — Бореля и получается интегро-дифференциальное уравнение относительно функции данного преобразования функции $u_j(r)$, которое мы будем обозначать через $\tilde{u}_j(p)$. При этом точка $p = 0$ будет особой точкой полученного уравнения. Она может быть как регулярной особенностью, так и иррегулярной. Если она регулярна, то, как известно, асимптотика функции $\tilde{u}_j(p)$ является конормальной, если иррегулярной, то, чтобы найти асимптотику этой функции в нуле, делается преобразование Лапласа — Бореля второй раз. При этом мы получаем интегральное уравнение относительно функции $\tilde{u}_j(q)$, которая является преобразованием Лапласа — Бореля функции $\tilde{u}_j(p)$. Для полученного уравнения, с помощью метода последовательных приближений строится асимптотика его решения в окрестности корней главного символа. Найдя асимптотику функции $\tilde{u}_j(q)$, и затем, сделав обратное преобразование Лапласа — Бореля, строится асимптотика функции $\tilde{u}_j(p)$ в окрестности нуля. Эта асимптотика может быть ВКБ-асимптотикой или иметь более общий вид и содержать экспоненты с дробными степенями. Поэтому возникает необходимость вычисления обратного преобразования Лапласа — Бореля от функций вида $e^{\alpha/p^{\frac{n}{k}}} g(p)$, где $n, k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим пример, который иллюстрирует применение метода повторного квантования к построению асимптотики решения дифференциального уравнения в окрестности иррегулярной особой точки:

$$\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^5 u - cr^2 u = 0. \tag{3}$$

Применив преобразование Лапласа — Бореля к уравнению (3), получим

$$p^5 \hat{u} - c\hat{r}^2 \hat{u} = f(p). \tag{4}$$

Приведем (4) к виду

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^5 \hat{u} - c\hat{u} = \left(\frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \tag{5}$$

Здесь $f(p)$ — произвольная голоморфная функция. Применим метод повторного квантования. Так как выполнено равенство

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^5 \hat{u} = \left(p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right)^2 \hat{u} + \left(10 - \frac{5}{2}\right) p^{\frac{3}{2}} \left(p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right) \hat{u} + 20 p^3 \hat{u},$$

то уравнение (5) можно переписать в виде

$$\left(-\frac{2}{3} p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right)^2 \hat{u} - \frac{2}{3}\left(10 - \frac{5}{2}\right) p^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{2}{3} p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right) \hat{u} + \frac{80}{9} p^3 \hat{u} - \frac{4}{9} c\hat{u} = \left(\frac{2}{3} \frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \tag{6}$$

Основной символ дифференциального оператора в (6) равен $q^2-\frac{4}{9}c$, т. е. основной символ имеет два простых корня $q_{1,2}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{c}$. Асимптотика решения уравнения (6) в окрестности регулярной особой точки $p=0$ имеет вид

$$\hat{u}(p)\approx\exp\frac{\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}}\,p^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^1p^i+\exp\frac{-\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}}\,p^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^2p^i.$$

Для того, чтобы найти асимптотику решения (3), надо найти обратное преобразование Лапласа — Бореля от выражения вида $\exp\left(\frac{\alpha}{p^{m/n}}\right)p^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}b_ip^i$, где $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Это будет сделано ниже в теореме 2.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы дадим определения основных понятий, которые будут использованы в статье (см. подробнее [12, 13]).

Определение 1. Аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ функция f, имеет не более, чем k-экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$|f|<Ce^{\alpha\frac{1}{|r|^k}}.$$

Обозначим через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ пространство функций k-экспоненциального роста. Если ε может быть выбран любым $0<\varepsilon\leqslant 2\pi$, то будем обозначать это пространство как $E_k(S_R)$, и $E(S_R)=E_1(S_R)$.

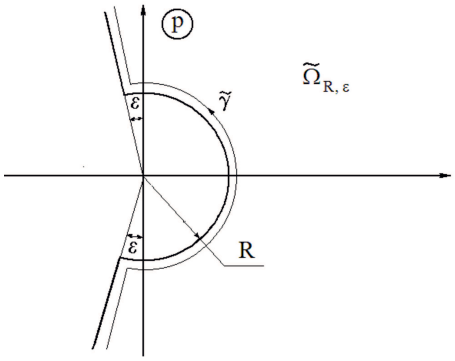

Рис. 1. Контур $\tilde{\gamma}$ и область $\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$.

Определение 2. *k-преобразованием Лапласа — Бореля* функции $f(r)\in E_k\left(S_{R,\varepsilon}\right)$ называется отображение $B_k: E_k\left(S_{R,\varepsilon}\right)\to \mathrm{E}(\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(C)$ такое, что

$$\tilde{f}=B_kf=\int\limits_0^{r_0}e^{-p/r^k}f(r)\frac{dr}{r^{k+1}}.$$

Обратное k-преобразование Лапласа — Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1}\tilde{f}=\frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}}e^{p/r^k}\tilde{f}(p)\,dp.$$

Контур $\tilde{\gamma}$ изображен на рис. 1.

Определение 3. Функция $\tilde{f}$ называется *бесконечно-продолжимой*, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек Z_R в $\mathbb{C}$, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньше R, не проходящего через Z_R.

Определение 4. Элемент f пространства $E_k\left(S_{R,\varepsilon}\right)$ называется *k-ресургентной функцией*, если его k-преобразование Лапласа — Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно-продолжимым.

В работе [14] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть f — ресургентная функция, тогда решение уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = f$ является ресургентной функцией в пространстве $E(S_R)$. Если полином $H_0(p)$ имеет простые корни в точках $p_1, \ldots, p_m$, тогда асимптотика решения в пространстве $E(S_R)$ однородного уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = 0$ имеет вид:*
при $k = 1$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{m} \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{7}$$

при $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{m} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^1}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{8}$$

при $k = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$,

$$u \approx \sum_{j} \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{m}{k}-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\alpha_{m-k-i}^1}{r^{\frac{m-i}{k}-1}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{9}$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$. Здесь через b_i^j, σ_j, $j = 1, \ldots, m$, обозначены некоторые числа.

Введем обозначение:

$$\hat{r}^n = B r^n B^{-1}. \tag{10}$$

В работе [14] было доказано равенство

$$\hat{r}^n \tilde{f}\,(p) = (-1)^n \int_{p_0}^{p} \frac{(p-p')^{n-1}}{\Gamma\,(n)} \tilde{f}\,(p')\,dp'. \tag{11}$$

В частном случае

$$\hat{r}\,\tilde{f}\,(p) = -\int_{p_0}^{p} \tilde{f}\,(p')\,dp'. \tag{12}$$

3. Основные результаты

В этом параграфе мы сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Асимптотика функции $B_m^{-1} p^{\sigma} e^{-\alpha/p^{\frac{k}{n}}} g\,(p)$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$, и $\sigma, \alpha \in \mathbb{C}$, в окрестности нуля имеет вид*

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{mk+n}{n+k}-1}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{mk+n-i}{k+n}-1}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \tag{13}$$

Здесь α_j, $j=1,\dots,k+n$, — *корни полинома* $p^{n+k}+(-1)^{n+1}(m-1)^n\left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k}$, *а* α_i^j, σ_j — *соответствующие числа,* $\sum_{i=0}^{\infty}b_i^j r^i$ — *асимптотический ряд.*

$\lhd$ Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^{n+k}u+c_{n-1}r^{m-1}\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+n-1}u\\ +c_{n-2}r^{2(m-1)}\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+n-2}u+\ldots+c_1r^{(n-1)(m-1)}\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+1}u\\ +cr^{n(m-1)}u+c_0r^{n(m-1)}\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^{k}u=0.\end{gathered}\tag{14}$$

Здесь через c_i, $i=0,\dots,n-1$, и c обозначены некоторые константы. Перепишем уравнение в виде

$$\begin{gathered}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^{n+k}u+c_{n-1}\frac{1}{m-1}\,r^{m-1}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+n-1}u\\ +c_{n-2}\frac{1}{(m-1)^2}\,r^{2(m-1)}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+n-2}u\\ +\ldots+c_1\frac{1}{(m-1)^{n-1}}\,r^{(n-1)(m-1)}\left(-\frac{1}{m-1}r^m\frac{d}{dr}\right)^{k+1}u\\ +c\,\frac{1}{(m-1)^{n+k}}\,r^{n(m-1)}u+c_0\frac{1}{(m-1)^n}\,r^{n(m-1)}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^{k}u=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Сделаем в (15) преобразование Лапласа — Бореля

$$\begin{gathered}p^{n+k}\tilde u+\frac{c_0(-1)^n}{(m-1)^{2n}}\int_1^p\ldots\int_1^{p2}p_1^k\tilde u(p_1)\,dp_1\ldots dp_n\\ +\frac{c_1(-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}}\int_1^p\ldots\int_1^{p2}p_1^{k+1}\tilde u(p_1)\,dp_1\ldots dp_{n-1}\\ +\ldots+\frac{c_2(-1)^{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}}\int_1^p\ldots\int_1^{p2}p_1^{k+2}\tilde u(p_1)\,dp_1dp_2\ldots dp_{n-2}\\ +\ldots+\frac{c_{n-1}(-1)}{(m-1)^2}\int_1^p p_1^{k+n-1}\tilde u(p_1)\,dp_1\\ +c(-1)^n\frac{1}{(m-1)^{2n+k}}\int_1^p\ldots\int_1^{p_2}\tilde u(p_1)\,dp_1\ldots dp_n=f(p).\end{gathered}\tag{16}$$

Через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция. Продифференцируем n раз

уравнение (16). Тогда

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^n p^{n+k}u + \frac{c_0(-1)^n}{(m-1)^{2n}}p^k u + \frac{c_1(-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}}\left(\frac{d}{dp}\right)p^{k+1}u + \frac{c_2(-1)^{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}}\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^{k+2}u \tag{17}$$
$$+\ldots+\frac{c_{n-1}(-1)}{(m-1)^2}\left(\frac{d}{dp}\right)^{n-1}p^{k+n-1}u + \frac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}}cu = \left(\frac{d}{dp}\right)^n f(p).$$

Покажем, что можно выбрать константы c, c_i, $i = 0,\ldots,n-1$ так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^\sigma e^{-\alpha/\frac{k}{p^n}}$ являлась решением (17), для этого подставим эту функцию в данное уравнение. Тогда получим соотношение относительно констант c, c_i, $i = 0,\ldots,n-1$:

$$\left(\alpha_0^n p^{\sigma+k} + \alpha_1^n p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^n p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^n p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \ldots + \alpha_n^n p^\sigma\right) + \frac{c_{n-1}(-1)}{(m-1)^{2(n-1)}}$$
$$\times\left(\alpha_0^{n-1}p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-1}p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^{n-1}p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^{n-1}p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1}p^{\sigma+k-\frac{(n-1)k}{n}}\right)$$
$$+\frac{c_{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}}\left(\alpha_0^{n-2}p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-2}p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \ldots + \alpha_{n-2}^{n-2}p^{\sigma+k-\frac{(n-2)k}{n}}\right)$$
$$+\ldots+\frac{c_1(-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}}\left(\alpha_0^1 p^{\sigma+k} + \alpha_1^1 p^{\sigma+k-\frac{k}{n}}\right) + \frac{c_0(-1)^n}{(m-1)^{2n}}p^{\sigma+k} + \frac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}}cp^\sigma = 0.$$

Здесь α_i^j, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$, — соответствующие постоянные, которые зависят от α и σ. Заметим, что $\alpha_n^n = \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$, $\alpha_i^i \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$. Из последнего уравнения следует, что выполнена система

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}}c = -\alpha_n^n\\
&\alpha_{n-1}^{n-1}c_{n-1} = -\alpha_{n-1}^n\\
&\alpha_{n-1}^{n-2}c_{n-1} + \alpha_{n-2}^{n-2}c_{n-2} = -\alpha_{n-2}^n\\
&\ldots\\
&\alpha_0^{n-1}c_{n-1} + \alpha_0^{n-2}c_{n-2} + \ldots + \alpha_0^1 c_1 + c_0 = -\alpha_0^n
\end{aligned}$$

Очевидно, что она имеет единственное решение. Отсюда следует, что можно выбрать константы c, c_i, $i = 0,\ldots,n-1$, так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^\sigma e^{-\alpha/p^{\frac{k}{n}}}$ была решением уравнения (17). Решение (14) является обратным преобразованием Лапласа — Бореля этой функции. Найдем все асимптотики его решений. Разделим это уравнение на $r^{n(m-1)}$ и запишем его в виде

$$\left(-\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{n+k}u + c_{n-1}^{'}\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1}\left(-\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{p-\frac{n(m-1)}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+n-1}u$$
$$+c_{n-2}^{'}\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^2 r^{2\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)}\left(-\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+n-2}u$$
$$+\ldots+c_1^{'}\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n-1} r^{(n-1)\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)}\left(-\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+1}u$$
$$+c_0^{'}\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^n r^{n\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)}\left(-\frac{n+k}{k(m-1)}\,r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^k u + c\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n+k}u = 0.$$

Здесь основной символ $H_0 = p^{n+k} + c\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n+k}$, где $c = (-1)^{n+1}(m-1)^{2n+k}\alpha_n^n = (-1)^{n+1}(m-1)^{2n+k}\left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$, а $c_i^{'}$, $i = 0, \ldots, n-1$, — соответствующие константы.

Отсюда следует, что

$$H_0 = p^{n+k} + (-1)^{n+1}(m-1)^{2n+k}\left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n\left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n+k}$$
$$= p^{n+k} + (-1)^{n+1}(m-1)^n\left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k}.$$

Из теоремы 1 видно, что если $k+1 = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $m > k$, асимптотика решения удовлетворяет соотношению

$$u \approx \sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{mk+n}{n+k}-1}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1}\frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{mk+n-i}{k+n}-1}}\right) r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \triangleright \tag{18}$$

Замечание. Уравнение (17) может быть приведено к виду

$$\left(-\frac{n}{k}\,p^{1+\frac{k}{n}}\frac{d}{dp}\right)^n u + b_0 p^k u + b_1 p^{\frac{(n-1)k}{n}}\left(p^{1+\frac{k}{n}}\frac{d}{dp}\right)u + b_1 p^{\frac{(n-2)k}{n}}\left(p^{1+\frac{k}{n}}\frac{d}{dp}\right)^2 u$$
$$+ \ldots + b_{n-1}p^{\frac{k}{n}}\left(p^{1+\frac{k}{n}}\frac{d}{dp}\right)^{n-1} + \left(\frac{n}{k}\right)^n\frac{1}{(m-1)^{2n+k}}cu = 0. \tag{19}$$

Здесь через b_i, $i = 0, \ldots, n-1$, обозначены соответствующие константы. Основной символ оператора равен $q^n + \left(\frac{n}{k}\right)^n\frac{1}{(m-1)^{2n+k}}, c$. Он имеет простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Отсюда следует, что асимптотики уравнения (19) представимы в виде линейной комбинации функций u_j, $j = 1, \ldots, n$:

$$u_j \approx \exp\left(\frac{\alpha_j}{p^{\frac{k}{n}-1}} + \sum_{i=1}^{k-n-1}\frac{\alpha_i^j}{p^{\frac{k-i}{n}-1}}\right)p^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j p^i.$$

Отсюда следует, что $B_{k/n}^{-1}u_j$ представимо в виде (18).

Вернемся к рассмотрению примера (3). Найдем

$$B_2^{-1}\exp\frac{\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}}\,p^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 p^i.$$

Так как в этом случае $k = 3$, $n = 2$, $m = 2$, то из формулы (13) следует, что

$$B_2^{-1}\exp\frac{\pm\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}}\,p^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i \approx \sum_{j=1}^{5}\exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{3}{5}}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1}\frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{3-i}{5}}}\right)r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i.$$

Коэффициенты α_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$, определяются из теоремы, а именно они являются корнями многочлена $p^5 - \left(\frac{5}{2}\right)^5$.

Отсюда следует, что асимптотики решения уравнения (3) имеет вид (18).

Таким образом, результат теоремы 2 расширяет возможность применения метода повторного квантования к дифференциальным уравнениям, образы Лапласа — Бореля которых являются уравнениями с дробными порядками вырождения и основными символами имеющими простые корни.

Литература

1. *Korovina M. V., Smirnov V. Yu.* Requantization method and its application to the construction of asymptotics for solutions of non-Fuchsian equations with holomorphic coefficients // J. Math. Sci.—2022.—Vol. 268, № 1.—P. 70–83. DOI: 10.1007/s10958-022-06181-4.
2. *Korovina M. V.* Repeated quantization method and its applications to the construction of asymptotics of solutions of equations with degeneration // Diff. Equat.—2016.—Vol. 52, № 1.—P. 58–75. DOI: 10.1134/S0012266116010055.
3. *Poincare H.* Sur les integrales irregulieres: Des equations lineaires // Acta Math.—1886.—Vol. 8.—P. 295–344. DOI: 10.1007/BF02417092.
4. *Poincare H.* Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In Selected works in three volumes. Vol. 3. Mathematics. Theoretical physics.—Moscow: Nauka, 1974.
5. *Korovina M. V.* Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point // MDPI Mathematics.—2020.—Vol. 8, № 12.—P. 1–15. DOI: 10.3390/math8122249.
6. *Korovina M. V.* Uniform asymptotics of solutions of the linear differential equations with holomorphic coefficients in a neighborhood of an infinitely // Lobachevskii J. Math.—2023.—Vol. 44, № 7.—P. 2765–2780. DOI: 10.1134/S1995080223070260.
7. *Кац Д. С.* Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференц. уравнения.—2015.—Т. 51, № 12.—С. 1612–1617. DOI: 10.1134/s0374064115120067.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского мат. об-ва.—1967.—Т. 16.—С. 209–292.
9. *Korovina M. V., Shatalov V. E.* Differential equations with degeneration and resurgent analysis // Diff. Equat.—2010.—Vol. 46, № 9.—P. 1267–1286. DOI: 10.1134/S0012266110090041.
10. *Korovina M. V., Matevossian H. A.* Uniform asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients in a neighborhood of singular points and their applications // MDPI Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 14.—P. 1–21. DOI: 10.3390/math10142465.
11. *Korovina M. V.* Application of the repeated quantization method to the problem of making asymptotic solutions of equations with holomorphic coefficients // International Journal of Open Information Technologies.—2019.—Vol. 7, № 9.—P. 14–22.
12. *Ecalle J.* Cinq Applications des Fonctions Resurgentes.—Paris: Prepublications Mathematiques d'Orsay, 1984.–110 p.
13. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory: Introduction to Resurgent Analysis.—Boca Raton, FL.: CRC Press, 1996.
14. *Коровина М. В.* Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 5.—С. 710–722.

Статья поступила 16 ноября 2024 г.

Коровина Мария Викторовна
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ведущий научный сотрудник кафедры общей математики
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4366-8292

Смирнов Владимир Юрьевич
Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
доцент кафедры прикладных программных средств
и математических методов
РОССИЯ, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: vl-smirnov@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2348-8614

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 61–71

APPLICATION OF THE REPEATED QUANTIZATION METHOD TO A CLASS OF NON-FUCHSIAN EQUATIONS

Korovina, M. V.[1] and Smirnov, V. Yu.[2]

[1] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia;
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia

E-mail: betelgeuser@yandex.ru, vl-smirnov@mail.ru

Abstract. One of the fundamental problems of the analytic theory of ordinary differential equations is the problem of constructing asymptotics of solutions of differential equations in the neighborhood of irregular singular points. In general, this problem has not yet been solved. However, in recent years, the method of repeated quantization has been created to solve this problem, which allows constructing asymptotics of solutions for a wide class of equations with irregular singularities. This work is devoted to the development of this method. For example, this method has been used to construct asymptotic solutions for differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant singular point, which, generally speaking, is irregular. The method of repeated quantization is based on the methods of resurgent analysis, that is, on the application of the Laplace-Borel transform. This method is applied when the roots of the principal symbol are multiple. Using the results of this article, the class of equations with irregular singular points to which the repeated quantization method is applicable is expanded. Namely, to those equations with an irregular singular point such that the asymptotics of solutions of the original equation in the Laplace-Borel images contain exponentials in whose exponents there are polynomials of a fractional degree of the variable. The application of the obtained results to an equation of this type is illustrated by a specific example.

Keywords: asymptotics of solutions, irregular singularities, resurgent analysis, Laplace–Borel transform, requantization method.

AMS Subject Classification: 34E10.

For citation: *Korovina, M. V. and Smirnov, V. Yu.* Application of the Repeated Quantization Method to a Class of Non-Fuchsian Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 61–71 (in Russian). DOI: 10.46698/i7249-6874-2842-b.

References

1. *Korovina, M. V. and Smirnov, V. Yu.* Requantization Method and Its Application to the Construction of Asymptotics for Solutions of Non-Fuchsian Equations with Holomorphic Coefficients, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 268, no. 1, pp. 70–83. DOI: 10.1007/s10958-022-06181-4.
2. *Korovina, M. V.* Repeated Quantization Method and Its Applications to the Construction of Asymptotics of Solutions of Equations with Degeneration, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 58–75. DOI: 10.1134/S0012266116010055.
3. *Poincare, H.* Sur les Integrales Irregulieres: Des Equations Lineaires, *Acta Mathematica*, 1886, vol. 8, pp. 295–344. DOI: 10.1007/BF02417092.
4. *Poincare, H. Analysis of the Mathematical and Natural Works of Henri Poincare, In Selected Works in Three Volumes, vol.* 3. *Mathematics. Theoretical Physics*, Moscow, Nauka, 1974.
5. *Korovina, M. V.* Asymptotics of Solutions of Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely Distant Point, *MDPI Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 12, pp. 1–15. DOI: 10.3390/math8122249.
6. *Korovina, M. V.* Uniform Asymptotics of Solutions of the Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in a Neighborhood of an Infinitely, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 7, pp. 2765–2780. DOI: 10.1134/S1995080223070260.

7. *Kats, D. S.* Computation of the Asymptotics of Solutions for Equations with Polynomial Degeneration of the Coefficients, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1589–1594. DOI: 10.1134/S001226611512006X.
8. *Kondrat'ev, V. A.* Boundary Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* [Proceedings of Moscow Mathematical Society], 1967, vol. 16, pp. 209–292 (in Russian).
9. *Korovina, M. V. and Shatalov, V. E.* Differential Equations with Degeneration and Resurgent Analysis, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 9, pp. 1267–1286. DOI: 10.1134/S0012266110090041.
10. *Korovina, M. V. and Matevossian, H. A.* Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications, *MDPI Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 14, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math10142465.
11. *Korovina, M. V.* Application of the Repeated Quantization Method to the Problem of Making Asymptotic Solutions of Equations with Holomorphic Coefficients, *International Journal of Open Information Technologies*, 2019, vol. 7, no. 9, pp. 14–22.
12. *Ecalle, J. Cinq Applications des Fonctions Resurgentes*, Paris, France, Prepublications Mathematiques d'Orsay, 1984.
13. *Sternin, B. Yu. and Shatalov, V. E. Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis*, Boca Raton, FL., CRC Press, 1996.
14. *Korovina, M. V.* Asymptotics of Solutions of Equations with Higher Degenerations, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 717–729. DOI: 10.1134/S0012266112050102.

Received November 16, 2024

Maria V. Korovina
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Leading Scientific Researcher
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4366-8292

Vladimir Yu. Smirnov
Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia,
Associate Professor
E-mail: vl-smirnov@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2348-8614