Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 5–20

УДК 514.743.48, 517.956.35, 517.955.8
DOI 10.46698/e7486-7095-0322-l

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

В. А. Гетман[1], **Т. Ф. Долгих**[1], **М. Ю. Жуков**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: vagetman@sfedu.ru, dolgikh@sfedu.ru, myuzhukov@mail.ru

Аннотация. Построено асимптотическое решение краевой задачи для двух квазилинейных уравнений гиперболического типа, описывающих поведение поперечной электромагнитной волны (TEM-волны) в нелинейной сплошной среде, когда зависимость поляризации P от напряженности электрического поля E (физическая нелинейность) имеет вид $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3)$, где χ_1, χ_2, χ_3 — диэлектрические восприимчивости, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Главный член асимптотики построен в двух случаях: (i) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \to 0$, $\chi_3 = 0$ (анизотропная сплошная среда), (ii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 \to 0$ (изотропная сплошная среда), хотя один из использованных методов построения асимптотики без труда переносится и на случай (iii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \to 0$, $\chi_3 \to 0$. В случае (i) асимптотика при $\chi_2 \to 0$ строится двумя способами. В первом варианте используется непосредственное разложение в ряд по малому параметру точного неявного решения краевой задачи с последующим численным построением явного решения на линиях уровня неявного решения (главного члена асимптотики неявного решения). Во втором варианте разложения в ряды по параметру проводятся на всех этапах, предшествующих построению точного неявного решения, что приводит к неявному решению, отличному от точного, но главный член асимптотики нового и прежнего решения совпадают. Эквивалентность двух указанных вариантов далеко неочевидна, в частности, точное неявное решение содержит гипергеометрическую функцию Гаусса, а асимптотическое неявное решение — функцию Бесселя. В случае (ii) асимптотику при $\chi_3 \to 0$ возможно построить лишь вторым способом, проводя разложение по параметру на всех этапах построения неявного решения. Первый вариант конструирования асимптотики непримени́м, ввиду того, что точное неявное решение не удается построить. Для построения решения краевой задачи о поведении TEM-волн, как точного, так и асимптотического, использован метод годографа на основе закона сохранения для системы двух квазилинейных гиперболических уравнений типа $1+1$ в частных производных первого порядка. Метод позволяет преобразовать систему квазилинейных уравнений в одно линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Эффективность метода зависит от наличия явных соотношений, связывающих исходные переменные с инвариантами Римана, а также от наличия явного выражения для функции Римана — Грина линейного дифференциального уравнения. В случаях (i), (ii) указанные условия выполняются. Представленные результаты позволяют детально проследить эволюцию TEM-волн в нелинейных средах, например, коаксиальных волноводах или в распределенных идеальных линиях передач, в частности, определить момент времени (и пространственную координату) при котором возможно возникновение ударных электромагнитных волн.

Ключевые слова: системы квазилинейных гиперболических уравнений, инварианты Римана, функция Римана — Грина, метод годографа, асимптотические разложения.

AMS Subject Classification: 35F15, 35L40, 41A58.

Образец цитирования: *Гетман В. А., Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю.* Асимптотика решения краевой задачи о поперечной нелинейной электромагнитной волне // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 5–20. DOI: 10.46698/e7486-7095-0322-l.

1. Введение

Построен главный член асимптотики решения краевой задачи об эволюции нелинейной поперечной электромагнитной волны (TEM-волны). В представленной работе рассмотрены два случая: (i) $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2)$ (анизотропная среда) и (ii) $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_3 E^3)$ (изотропная среда). Выбор указанных определяющих соотношений не является случайным. Напомним, что отклик любого диэлектрика (в волоконном световоде) на световое воздействие становится нелинейным в сильном электромагнитном поле. Для центросимметричных оптических кристаллов (кристаллов, обладающих центром симметрии — инверсией относительно центра симметрии) вытекает, что при изменении направления электрического поля $E \to -E$ поляризация также изменяет знак $P \to -P$ (случай (ii)). Однако при больших напряженностях электрического поля оптический материал теряет центросимметричность ввиду волновых нелинейных (трехфотонных) взаимодействий, и основной вклад в его нелинейную поляризованность вносят квадратичные члены (случай (i)). Укажем также, что при рассмотрении задач нелинейной оптики исторически принято оперировать с поляризацией среды P, а не с электрической индукцией D, которая связана с P соотношением $D = \varepsilon_0 E + P$. Более естественно, при использовании уравнений Максвелла использовать именно электрическую индукцию D взамен поляризации P. Подробнее о связи между P и D, с оценкой величин параметров χ_1, χ_2, χ_3 и других, см. текст после формулы (40).

Необходимость в построении асимптотики (соответственно при $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \to 0$ и/или $\chi_1 = O(1)$, $\chi_3 \to 0$), помимо чисто математического интереса, возникает, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, асимптотическое решение (главные члены) более «обозримо», чем точное решение, и позволяет легко проводить анализ решения и его свойств. При этом, как показали результаты сравнения, в некоторой области параметров асимптотическое решение мало отличается от точного. Во-вторых, и это более важно, если в случае (i) можно построить точное неявное решение, то в случае (ii) точное решение отсутствует (по крайней мере, его не удается построить) и можно указать лишь главные члены асимптотики.

Для конструирования решения, как точного, так и асимптотического, используется метод годографа на основе закона сохранения (см., например, [1, 2]). Это позволяет систему двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, записанных в инвариантах Римана, трансформировать к одному линейному уравнению в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Именно такое линейное уравнение играет ключевую роль в эффективности применяемого метода. Если удается указать явную форму решения линейного уравнения, например, построив функцию Римана — Грина, то неявное решение исходной задачи также представимо в виде явного соотношения. Немаловажную роль играет и наличие явных соотношений, взаимосвязывающих исходные переменные и инварианты Римана. Несмотря на то что для двух квазилинейных уравнений инварианты Римана всегда существуют, далеко не всегда удается построить явные формулы. Это связано как с построением явных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, так и с построением обратных функций. В случае (i), когда указанный способ построения решения осуществим, имеется точное неявное решение, и процедура построения главных членов асимптотики сводится к простому разложению в ряд по малому параметру. Напротив, в случае (ii) не удается указать явные соотношения между исходными переменными и инвариантами Римана и, в связи с этим, не удается даже построить в явном виде соответствующее линейное уравнение метода годографа. Для построения главного члена асимптотического решения в слу-

чае (ii) разложение в ряды по малому параметру проводится на всех этапах метода — при построении взаимосвязи между исходными переменными и инвариантами Римана, при построении зависимости характеристических направлений от инвариантов Римана, при вычислении коэффициентов линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. В конечном итоге, это позволяет указать явное решение соответствующего линейного уравнения (функцию Римана — Грина) и окончательно получить главный член асимптотического разложения решения. Аналогичная процедура проведена и в случае (i), что, как показала проверка, приводит к совпадению с результатами, полученными непосредственным разложением в ряд по параметру, имеющегося в случае (i), точного решения. Отметим, что это далеко нетривиальный результат. В частности, в случае (i) соотношение для функции Римана — Грина в точном решении содержит гипергеометричскую функцию Гаусса, тогда как для асимптотического варианта соответствующая функции Римана — Грина выражается через функцию Бесселя.

Представленные результаты позволяют детально проследить, разумеется при малых значениях параметров, эволюцию нелинейных поперечных электромагнитных волн в зависимости от краевых или начальных данных (принципиальное различие между краевой и начальной задачей для квазилинейных уравнений в частных производных отсутствует [3, § 6, с. 43–47]). Несмотря на то, что параметр (диэлектрическая восприимчивость χ_2 или χ_3) считается малым (в пределе параметр равен нулю, что соответствует обычной линейной волне), все типичные для нелинейных волн эффекты — искажение профиля напряженностей электрического и магнитного полей, возможность возникновения ударных электромагнитных волн (см., например, [4–8]) и т. п., сохраняются. Кроме этого, возможно вычисление момента времени опрокидывания решения (возникновение ударной волны), что и продемонстрировано примером для некоторого начального распределения.

Следует также сказать, что для построения линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, которое, в конечном итоге, определяет характер поведения решения, вовсе не обязательно использовать метод годографа на основе закона сохранения [1, 2]. Можно применять и другие методы годографа, например, классический вариант (см., например, [3, с. 33, 34]) или обобщенный метод годографа (см., например, [9]), эквивалентность которых показана в [10].

2. Основные уравнения и инварианты Римана

Для описания поведения поперечной электромагнитной волны (TEM-волны) используем уравнения Максвелла в среде при отсутствии электрических токов и свободных зарядов (см., например, [11, гл. IX])

$$\boldsymbol{D}_t - \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{B}_t + \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

с определяющими соотношениями

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H}). \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ — электрическая и магнитная индукции.

Для поперечной электромагнитной волны решение (1), (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D} = (D(z,t), 0, 0), \quad \boldsymbol{B} = (0, B(z,t), 0), \\ &\boldsymbol{E} = (E(z,t), 0, 0), \quad \boldsymbol{H} = (0, H(z,t), 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь z — направление распространения плоской волны, E, D, H, B — соответствующие компоненты векторных полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$.

В случае (3) уравнения (1) с определяющими соотношениями (2) представляют собой систему двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$D_t(E) + H_z = 0, \quad B_t(H) + E_z = 0, \tag{4}$$

которые дополняем краевыми условиями

$$E\big|_{z=0} = E_0(t), \quad H\big|_{z=0} = H_0(t), \tag{5}$$

где $E_0(t)$, $H_0(t)$ — известные функции.

Ввиду того, что различие между начальной и краевой задачами для квазилинейных гиперболических уравнений отсутствует (обе задачи принято называть задачей Коши, см., например, [3, § 6, с. 43–47]), произведем замены

$$t = X, \quad z = T, \tag{6}$$

приводя (4), (5) к «привычному» виду

$$H_T + D_E(E)E_X = 0, \quad E_T + B_H(H)H_X = 0, \tag{7}$$

$$E\big|_{T=0} = E_0(X), \quad H\big|_{T=0} = H_0(X). \tag{8}$$

Здесь T — «время», X — «координата», D_E, B_H — производные функций D, B.

Задача (7), (8) записывается в инвариантах Римана (см. [12], а также [3, § 3, с. 27–31])

$$R^1_T + \lambda^1 R^1_X = 0, \quad R^2_T + \lambda^2 R^2_X = 0, \tag{9}$$

$$R^1\big|_{T=0} = R^1_0(X), \quad R^2\big|_{T=0} = R^2_0(X). \tag{10}$$

Здесь $R^1(X,T)$, $R^2(X,T)$, $R^1_0(X)$, $R^1_0(X)$ — инварианты Римана и их начальные значения при $T = 0$, $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ — характеристические направления.

Функции λ^1, λ^2 и связь исходных переменных E, H с инвариантами Римана R^1, R^2 определяются соотношениями

$$\lambda^1 = -\sqrt{D_E(E)B_H(H)}, \quad \lambda^2 = \sqrt{D_E(E)B_H(H)}, \tag{11}$$

$$R^1 = F(H) - G(E), \quad R^2 = F(H) + G(E), \tag{12}$$

$$F(H) = \int \sqrt{B_H(H)}\, dH, \quad G(E) = \int \sqrt{D_E(E)}\, dE, \tag{13}$$

где F, G — вспомогательные функции.

Далее рассматриваем два вида определяющих соотношений.

(i) Анизотропная сплошная среда

$$D(E) = E + \frac{1}{2}\,\eta E^2, \quad B(H) = H. \tag{14}$$

(ii) Изотропная сплошная среда

$$D(E) = E + \frac{1}{3}\,\eta E^3, \quad B(H) = H. \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что соотношения (1)–(3) справедливы как для размерных, так и безразмерных величин, в то время как (14), (15) записаны для безразмерных величин. Связь между размерными и безразмерными величинами, позволяющая сохранять в задаче лишь один параметр η, указана далее в разделе с демонстрацией результатов для конкретного примера (см. соотношения (40)).

3. Точное решение в случае соотношений (14)

Детально способ построения решения задачи (9)–(14) описан в [1, 2, 10, 13–20]. Здесь ограничимся лишь изложением основных результатов и соотношений.

Решение задачи (9)–(14) на линии уровня $T_* = T(a,b)$ точного неявного решения $T(a,b)$ имеет вид

$$\begin{gathered} R^1(X,T_*) = R_0^1(b(\tau)), \quad R^2(X,T_*) = R_0^2(a(\tau)), \\ T_* = T(a_*,b_*), \quad X = Y(\tau). \end{gathered} \tag{16}$$

Считается, что линия уровня параметризована при помощи параметра τ, т. е. $T_* = T(a(\tau),b(\tau))$, и функции $a(\tau)$, $b(\tau)$, $Y(\tau)$ определяются путем интегрирования (численного) задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a_\tau(\tau) &= -T_b(a(\tau),b(\tau)), \\ b_\tau(\tau) &= T_a(a(\tau),b(\tau)), \\ Y_\tau(\tau) &= J(a(\tau),b(\tau)), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} a\big|_{\tau=0} = a_*, \quad b\big|_{\tau=0} = b_*, \quad Y\big|_{\tau=0} = Y_*, \\ J(a,b) = \big(\lambda^2\big(r^1,r^2\big) - \lambda^1\big(r^1,r^2\big)\big)\Big|_{\substack{r^1=r^1(b)\\ r^2=r^2(a)}} T_a T_b, \\ r^1(b) = R_0^1(b), \quad r^2(a) = R_0^2(a). \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь a_*, b_* — некоторая точка на линии уровня $T_* = T(a_*,b_*)$, Y_* — координата X, соответствующая параметру $\tau = 0$, $J(a,b)$ — якобиан преобразования $(a,b) \rightleftarrows (X,T)$. Подробно способ конструирования задачи (17), (18) и определения начальных значений a_*, b_*, Y_* описан в [1, с. 48–51].

Функция $T(a,b)$ — это неявное двухпараметрическое решение задачи (9)–(13), которое имеет вид

$$T(a,b) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi\big(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) \,\big|\, r^1(b), r^2(a)\big)\, d\tau, \tag{19}$$

$$\varphi\big(R^1,R^2 \,\big|\, r^1,r^2\big) = \frac{2\Phi(R^1,R^2 \,|\, r^1,r^2)}{\lambda^2(r^1,r^2) - \lambda^2(r^1,r^2)}\,. \tag{20}$$

Здесь функция $\Phi(R^1,R^2|r^1,r^2)$ — функция Римана — Грина уравнения

$$\varphi_{R^1R^2} + A(R^1,R^2)\,\varphi_{R^1} + B(R^1,R^2)\,\varphi_{R^2} = 0, \tag{21}$$

$$A = \frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2}\,, \quad B = -\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2}\,. \tag{22}$$

По переменным r^1, r^2 функция $\Phi(R^1,R^2|r^1,r^2)$ удовлетворяет уравнению, сопряженному к (21), а по переменным R^1, R^2 — уравнению (21) и дополнительным условиям

$$(\psi - \lambda^1\varphi)\big|_{R^1=r^1} = 1, \quad (\psi - \lambda^2\varphi)\big|_{R^2=r^2} = -1, \tag{23}$$

где ψ удовлетворяет уравнениям

$$\psi_{R^1} = \lambda^1\varphi_{R^1}, \quad \psi_{R^2} = \lambda^2\varphi_{R^2}. \tag{24}$$

Собственно говоря, уравнение (21) является условием совместности (разрешимости) уравнений (24).

Анализ приведенных соотношений (16)–(24) показывает, что ключевую роль играют формулы (19), (20) для функции $T(a,b)$, которая определяется решением задачи (21)–(24) или построением функции Римана — Грина уравнения (21). Требуется конкретизировать уравнение (21), вычислив коэффициенты (22). В свою очередь, при помощи (11)–(13) следует определить зависимость характеристических направлений λ^1, λ^2 от инвариантов Римана R^1, R^2. Заметим, что формулы (11), (12) задают зависимости λ^1, λ^2 от E и H, но не инвариантов Римана. Для вывода зависимостей $\lambda^1(R^1,R^2)$, $\lambda^2(R^1,R^2)$ необходимо построение явных функций, обратных к $F(H)$, $G(E)$, т. е. $H=H(R^1,R^2)$, $E=E(R^1,R^2)$, что не всегда возможно. В частности, в случае определяющих соотношений (14) это удается сделать, но для (15) явных формул вида $H=H(R^1,R^2)$, $E=E(R^1,R^2)$ не существует.

Задачу (21)–(24) можно заменить задачей для определения функций Римана — Грина $\Phi(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ уравнения (21) или ввиду симметрии относительно замен $(R^1,R^2)\leftrightharpoons(r^1,r^2)$ (см., например, [21, гл. V, § 5, с. 451, 452]) задачей

$$\begin{gathered}\Phi_{R^1R^2}+A\big(R^1,R^2\big)\Phi_{R^1}+B\big(R^1,R^2\big)\Phi_{R^2}=0,\\ \big(\Phi_{R^2}+A\Phi\big)\big|_{R^1=r^1}=0,\quad \big(\Phi_{R^1}+B\Phi\big)\big|_{R^2=r^2}=0,\end{gathered}\tag{25}$$

$$\Phi\big(r^1,r^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=1.\tag{26}$$

которая, как правило, легче решается, чем (21)–(24).

Соотношения (11)–(13), (22) в случае (14) принимают вид

$$\begin{gathered}\lambda^1=-\,(1+\eta E)^{1/2}\,,\quad \lambda^2=(1+\eta E)^{1/2}\,,\\ \lambda^2=-\lambda^1=\left(1+\frac{3}{4}\left(R^2-R^1\right)\eta\right)^{1/3},\\ R^1=H-G,\quad R^2=H+G,\\ G=\frac{2}{3\eta}\left((1+\eta E)^{3/2}-1\right),\quad H=\frac{1}{2}\left(R^1+R^2\right),\\ E=\frac{1}{\eta}\left(1+\frac{3\eta(R^2-R^1)}{4}\right)^{2/3}-\frac{1}{\eta}\,,\end{gathered}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}A&=\frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1-\lambda^2}=\frac{\eta}{8+6(R^2-R^1)\eta}\,,\\ B&=-\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1-\lambda^2}=-\frac{\eta}{8+6(R^2-R^1)\eta}\,.\end{aligned}\tag{28}$$

Функция Римана — Грина $\Phi(R^1,R^2|r^1,r^2)$ уравнения (21) (или по переменным R^1, R^2 решение задачи (21)–(23)) в случае коэффициентов, определяемых (28), имеет вид

$$\Phi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=\frac{(r+s)^\gamma}{(R+S)^\gamma}{}_2F_1(1-\gamma,\gamma;1,-z_0),\tag{29}$$

$$z_0=\frac{(R-r)(S-s)}{(R+S)(r+s)},\quad \gamma=\frac{1}{6},$$

$$R=2-3\eta R^1,\quad S=2+3\eta R^2,\quad r=2-3\eta r^1,\quad s=2+3\eta r^2.$$

Кажущаяся громоздкость соотношений (16)–(29) компенсируется тем, что, в некотором смысле, построенное решение является точным. Погрешность возникает лишь на этапе численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17), (18) и вычисления интегралов (19). При этом никакие аппроксимации исходной задачи (7), (8) или (9), (10), типичные для метода конечных разностей, методов конечных элементов и конечных объемов не используются.

4. Главный член асимптотики в случае (14)

При наличии точного решения построение асимптотики (не только главного члена) не представляет трудностей — следует использовать разложение в ряд по параметру $\eta \to 0$, считая, что $E = O(1)$, $H = O(1)$. Такое разложение достаточно указать лишь для функции (20), которая требуется для вычисления $T(a,b)$ по формуле (19). Заметим, что если имеется точное решение, то построение асимптотики может потребоваться по двум причинам. Во-первых, это приводит к упрощению вычислений и анализа результатов. Во-вторых, появляется возможность сравнения различных методов построения асимптотического решения.

Приведем лишь окончательный результат, опуская громоздкие выкладки:

$$\begin{gathered}\varphi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=1-\frac{\eta(r^2-r^1)}{8}-\frac{\eta(R^2-R^1)}{8}+O\big(\eta^2\big),\\ T(a,b)=(b-a)\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta(r^2(a)-r^1(b))}{16}\right)-\frac{\eta}{16}\int\limits_a^b\big(R_0^2(\tau)-R_0^1(\tau)\big)\,d\tau+O\big(\eta^2\big).\end{gathered}\tag{30}$$

Функцию $T(a,b)$, используя (27), можно записать и в терминах E_0, H_0 (см. (5) или (8)). В частности,

$$R_0^2(\tau)-R_0^1(\tau)=2E_0(\tau)+O(\eta),$$

$$r^2(a)-r^1(b)=H_0(a)-H_0(b)+E_0(a)+E_0(b)+O(\eta).$$

5. Построение асимптотики в общем случае

В случае определяющих соотношений (15), как и во многих других, точного решения задачи (9), (10) построить не удается. Однако главный член асимптотики решения можно построить, проводя процедуру разложения в ряды по малому параметру на всех этапах метода годографа при получении соотношений (11)–(13), (19)–(26).

Как уже говорилось, основную роль в построении решения в форме (16)–(20) играет функция $\Phi(R^1,R^2|r^1,r^2)$, т. е. решение задачи (25)–(26) с конкретными коэффициентами $A(R^1,R^2)$, $B(R^1,R^2)$.

Предположим, что

$$\begin{aligned}A\big(R^1,R^2\big)&=\eta A^1\big(R^1,R^2\big)+\eta^2A^2\big(R^1,R^2\big)+\ldots,\quad \eta\to0,\\ B(R^1,R^2)&=\eta B^1\big(R^1,R^2\big)+\eta^2B^2\big(R^1,R^2\big)+\ldots,\quad \eta\to0.\end{aligned}\tag{31}$$

Далее показано, что это справедливо, по-крайней мере, в случае определяющих соотношений (14), (15).

Решение задачи (25)–(26) ищем в виде

$$\Phi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=\Phi^0\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)+\eta\Phi^1\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)+\dots\,. \tag{32}$$

Подставляя (32) в задачу (25)–(26), приравнивая члены при одинаковых степенях η, с учетом (31) получим серию задач для определения Φ^0, Φ^1 и т. д.

Для $\Phi^0(R^1,R^2|r^1,r^2)$ имеем

$$\Phi^0_{R^1R^2}=0,\quad \Phi^0_{R^2}\big|_{R^1=r^1}=0,\quad \Phi^0_{R^1}\big|_{R^2=r^2}=0.$$

Очевидно, что

$$\Phi^0\big(r^1,r^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=1. \tag{33}$$

Для $\Phi^1(R^1,R^2|r^1,r^2)$ с учетом (33) получим

$$\Phi^1_{R^1R^2}\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=0,$$

$$\Phi^1_{R^2}\big(r^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)+A^1\big(r^1,R^2\big)=0,$$

$$\Phi^1_{R^1}\big(R^1,r^2\,\big|\,r^1,r^2\big)+B^1\big(R^1,r^2\big)=0,$$

$$\Phi^1\big(r^1,r^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=0.$$

Легко убедиться, что

$$\Phi^1\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=-\int\limits_{r^2}^{R^2}A^1\big(r^1,\tau\big)\,d\tau-\int\limits_{r^1}^{R^1}B^1\big(\tau,r^2\big)\,d\tau. \tag{34}$$

Таким образом, если ограничиваться главными членами асимптотики, то достаточно указать $A^1(R^1,R^2)$, $B^1(R^1,R^2)$, используя (11)–(13), (22).

Например, в случае определяющих соотношений (14) с учетом (27), (28) имеем

$$\lambda^2=-\lambda^1=1+\frac{\eta(R^2-R^1)\eta}{4}+O\big(\eta^2\big), \tag{35}$$

$$A=\frac{\eta}{8}+O\big(\eta^2\big),\quad A^1=\frac{1}{8}\,,\quad B=-\frac{\eta}{8}+O\big(\eta^2\big),\quad B^1=-\frac{1}{8}\,. \tag{36}$$

Осуществляя подстановку (36) в (34), а затем используя (35), (20), имеем для $\varphi^1(r^1,r^2|r^1,r^2)$ ранее полученную при помощи точного решения формулу (30), что косвенно указывает на корректность подхода к построению асимптотики.

В случае определяющих соотношений (14) возможен некоторый «промежуточный» вариант. Дело в том, что если пренебречь членами порядка $O(\eta^2)$ в коэффициентах, то уравнение (21) (или (25)) принимает вид

$$\varphi_{R^1R^2}+\frac{\eta}{8}\,\varphi_{R^1}-\frac{\eta}{8}\,\varphi_{R^2}=0,$$

для которого функция Римана — Грина хорошо известна (см., например, [22–26], [27, с. 116–124]). Это позволяет не проводить дальнейшие разложения в ряд по параметру η, ограничившись таким разложением лишь для коэффициентов A, B. Этот прием, в частности, был успешно использован в [28] для построения задачи о течении идеальной жидкости по внешней поверхности цилиндра.

Вид «промежуточного» варианта асимптотики решения

$$\varphi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=\frac{4\exp\big(\frac{\eta(r^2-r^1)-\eta(R^2-R^1)}{8}\big)}{4+\eta(r^2-r^1)}\,J_0(z_5),$$

$$z_5=\frac{\eta}{4}\,\big(\big(R^1-r^1\big)\big(R^2-r^2\big)\big)^{1/2},$$

где J_0 — функция Бесселя.

6. Главный член асимптотики в случае (15)

В случае определяющих соотношений (15) точное решение построить не удается. Разыскивая главный член асимптотического решения, удобнее рассматривать более общий вариант определяющих соотношений

$$D(E)=\left(E+\frac{1}{m}\,\eta E^m\right),\quad B(H)=H, \tag{37}$$

который, в частности, объединяет (14), (15).

Нетрудно показать, что в случае (37) из (11)–(13), (22) следует (сравни с (27), (28) и при $m=2$ с (35), (36))

$$\lambda^2=-\lambda^1=1+2^{-m}\eta\big(R^2-R^1\big)^{m-1}+O\big(\eta^2\big),$$

$$R^1=H-E+O(\eta),\quad R^2=H+G+O(\eta),$$

$$E=\frac{1}{2}\,\big(R^2-R^1\big)+O(\eta),\quad H=\frac{1}{2}\,\big(R^2+R^1\big)+O(\eta),$$

$$A\big(R^1,R^2\big)=2^{-m-1}\eta(m-1)\big(R^2-R^1\big)^{m-2}+O\big(\eta^2\big),$$

$$B\big(R^1,R^2\big)=-2^{-m-1}\eta(m-1)\big(R^2-R^1\big)^{m-2}+O\big(\eta^2\big).$$

Окончательно (сравни при $m=2$ с (30))

$$\varphi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=1-\eta\,\theta_m\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big).$$

$$\theta_m\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=2^{-m-1}\big(\big(R^2-r^1\big)^{m-1}+\big(r^2-R^1\big)^{m-1}\big)+O\big(\eta^2\big).$$

Здесь $\theta_m(R^1,R^2\,|\,r^1,r^2)$ — вспомогательное обозначение.

Отметим, что вместо (37), очевидно, можно рассматривать определяющие соотношения, содержащие два параметра

$$D(E)=\left(E+\frac{1}{2}\,\eta_2E^2+\frac{1}{3}\,\eta_3E^3\right),\quad B(H)=H.$$

В этом случае главный член асимптотики имеет вид

$$\varphi\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)=1-\eta_2\theta_2\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big)-\eta_3\theta_3\big(R^1,R^2\,\big|\,r^1,r^2\big).$$

7. Пример решения в случае (14)

В случае определяющих соотношений (14) приведем результаты сравнения одной из важных характеристик — момента опрокидывания T_0 решения (образования ударной волны), вычисленного при помощи точного и асимптотического решений. Момент T_0 определяется как (подробнее см. [19, формулы (5.8), (5.9)])

$$T_0 = T(a_0, b_0).$$

Здесь (a_0, b_0) — точка на линии уровня T_0, в которой возникает ударная волна, определяемая решением системы уравнений

$$J(a_0, b_0) = 0, \quad T_{aa}(a_0, b_0) T_{bb}(a_0, b_0) = 0. \tag{38}$$

Для «начальных» данных

$$E_0(X) = \frac{h(X)}{1 + X^4} = \frac{h(t)}{1 + t^4}, \quad H_0(X) = 0, \quad \eta = 0, 2, \tag{39}$$

где $h(X)$ — функция Хевисайда, точное значение $T_0 \approx 19,022$, а вычисленное при помощи асимптотических формул $T_0 \approx 17,597$.

Таким образом, даже для сравнительно большого значения параметра η разница точного и асимптотического значений не превышает $8,1\%$. Вычислительный эксперимент показал, что и для других начальных данных различие между точным и асимптотическим значениями достаточно мало и, естественно, уменьшается с уменьшением параметра η. Заметим, что одним из вариантов использования асимптотических формул является нахождение начальных приближений для решения системы нелинейных уравнений (38), позволяющих вычислять такой важный параметр, как момент возникновения ударной электромагнитной волны.

Напомним, что решается краевая задача (4), (5) и $X = t$ (см. (6)). Иными словами, (39) — это краевое условие при $z = 0$ (например, на торце оптического волновода), представляющее временно́й затухающий сглаженный импульс, а T_0 является координатой z, в которой возникает ударная волна.

Связь размерных (отмечены «шапочкой» и звездочками) и безразмерных величин задается соотношениями

$$\widehat{E} = E_* E, \quad \widehat{H} = E_* \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\mu_*}}\, H, \quad \widehat{z} = L_* z, \quad \widehat{t} = T_* t, \quad \frac{L_*}{T_*} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_* \mu_*}}\ \text{м/с},$$

$$\widehat{\varepsilon}_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл/В/м}, \quad \widehat{\mu}_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}\ \text{В с/А/м}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \widehat{\varepsilon}_0, \quad \mu_* = \mu \widehat{\mu}_0.$$

Здесь E_*, L_*, T_* — характерные значения напряженности электрического поля, длины и времени, ε, μ — относительные диэлектрические и магнитные проницамости.

В нелинейной оптике, как правило, взамен электрической индукции D принято использовать поляризацию среды P, которая задается соотношением

$$\begin{gathered} \widehat{D} = \widehat{\varepsilon}_0 \widehat{E} + \widehat{P}, \quad \widehat{P} = \widehat{\varepsilon}_0 \big(\widehat{\chi}_1 \widehat{E} + \widehat{\chi}_2 \widehat{E}^{\,2} + \widehat{\chi}_3 \widehat{E}^{\,3} + \dots \big), \\ \varepsilon = 1 + \widehat{\chi}_1, \quad \eta = \frac{2 \widehat{\chi}_2 E_*}{(1 + \widehat{\chi}_1)}, \end{gathered} \tag{40}$$

где $\widehat{\chi}_k$ — диэлектрические восприимчивости, имеющие, например, значения [29, с. 18]

$$\widehat{\chi}_1 \approx 1 - 10, \quad \widehat{\chi}_2 \approx \big(10^{-13} - 10^{-11}\big)\ \text{м/В}, \quad \widehat{\chi}_3 \approx \big(10^{-23} - 10^{-21}\big)\ \text{м}^2/\text{В}^2.$$

Выбирая $E_* = 2 \cdot 10^{10}$ В/м (импульсный лазер [29, с. 34]) для параметров $\widehat{\chi}_1 = 1$, $\widehat{\chi}_2 = 10^{-11}$ м/В, $\widehat{\chi}_3 = 10^{-23}$ м^2/В^2, получим

$$\frac{\widehat{\chi}_3 E_*^3}{\widehat{\chi}_2 E_*^2} = 0{,}02, \quad \eta = \frac{2\widehat{\chi}_2 E_*}{1 + \widehat{\chi}_1} = 0{,}2.$$

Это, в частности, означает, что кубическими нелинейностями можно пренебрегать по сравнению с квадратичными, и выбор определяющего соотношения в виде (14) при некоторых значениях величины напряженности электрического поля и восприимчивостей достаточно оправдан.

Заметим, что главные успехи прикладной нелинейной оптики связаны с использованием нелинейных эффектов, описываемых квадратичной нелинейной восприимчивостью. Соответствующие волновые нелинейные взаимодействия принято называть трехфотонными. Как уже говорилось во введении, для центросимметричных оптических кристаллов при инверсии относительно центра симметрии следует, что замена $E \to -E$ влечет замену $P \to -P$. Если оптический материал не является центросимметричным, то он обладает ненулевой квадратичной восприимчивостью, в частности, к таким средам относятся пьезоэлектрики. Более подробно о изотропных и анизотропных оптических средах, см. в [30, с. 17–20], [31, с. 7, 23].

8. Заключение

С точки зрения авторов, наиболее важным результатом работы является подтверждение возможности построения асимптотического решения путем замены асимптотическими соотношениями переменных коэффициентов линейного уравнения в частных производных второго порядка, возникающих при использовании метода годографа. Конечно, это не единственная возможность. В частности, в серии статей [32] для построения асимптотических решений задач об бозе-эйнштеновском конденсате применялись идеи работы [33] (об уравнениях газовой динамики) — анализ поведения функции Римана–Грина и замена ее асимптотическим приближением.

Наконец, укажем, что ТЕМ-волна (поперечная электромагнитная волна) на практике реализуется либо между двумя плоскими поверхностями (имеющими бесконечную проводимость), либо в коаксиальных линиях передач (волноводах). Возможно также рассматривать, так называемые, эквивалентные распределенные линии передач, составленные из емкостей и индуктивностей (см., например, [34]). Наличие асимптотических (и точных) решений позволит детально анализировать прохождение сигналов по линиям передач.

Литература

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—126 с.
2. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA.—2012.—Vol. 8, 071.—16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.—М.: Наука, 1978.—668 с.
4. *Катаев И. Г.* Ударные электромагнитные волны.—М: Советское радио, 1963.—152 с.
5. *Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И.* Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. Радиофизика.—1967.— Т. 10, № 9.—С. 1376–1413.
6. *Журавлев В. М.* Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // Теорет. и мат. физ.—2013.—Т. 174, № 2.— С. 272–284. DOI: 10.4213/tmf8391.

7. *Журавлев В. М.* Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью // Изв. вузов. Приволж. регион. Физ.-мат. науки.—2013.—№ 3 (27).—С. 117–135.
8. *Журавлев В. М.* Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // Теорет. и мат. физ.—2016.—Т. 186, № 3.—С. 371–385. DOI: 10.4213/tmf8889.
9. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 5.—С. 1048–1068.
10. *Долгих Т. Ф. Жуков М. Ю.* Варианты метода годографа для решения системы двух квазилинейных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, № 2.—С. 34–50. DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-l.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред, 4-е изд.—М.: Физматлит, 2005.—656 с.
12. *Donato A., Fusco O. D.* Some Applications of the Riemann method to electromagnetic wave propagation in nonlinear media // ZAMM 60.—1980.—P. 539–542.
13. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations.—2014.—arXiv: 1410.2832.
14. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations.—2014.—arXiv: 1503.01762.
15. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations.—2014.—arXiv: 1512.06710.
16. *Долгих Т. Ф.* Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2017.—№ 3-1 (195-1).—С. 28–35. DOI: 10.23683/0321-3005-2017-3-1-28-35.
17. *Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2021.—№ 1.—С. 15–24. DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-15-24.
18. *Жуков М. Ю., Долгих Т. Ф.* Математические модели жидкости, газа и переноса электрическим полем в многокомпонентных химически активных средах // Математический форум. Т. 13. Современные проблемы математики и математического образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020.—С. 87–104.—(Итоги науки. Юг России).
19. *Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю.* Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой в случае гиперболических уравнений // Прикл. матем. и мех.—2022.—Т. 86, № 1.—С. 18–34. DOI: 10.31857/S0032823522010039.
20. *Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю.* Метод годографа для решения задачи об опрокинутой мелкой воде // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2022.—Т. 62, № 1.—С. 113–123. DOI: 10.31857/S0044466922010069.
21. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.—830 с.
22. *Copson E. T.* On the Riemann–Green function // Arch. Ration. Mech. Anal.—1958.—Vol. 1.—P. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
23. *Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук.—1992.—Т. 47, № 4 (286).—С. 83–144.
24. *Zeitsch P. J.* On the Riemann function // Mathematics.—2018.—Vol. 6 (12), № 316. DOI: 10.3390/math6120316.
25. *Daggit E. A.* The use of infinitesimal transformations in predicting the form of the Riemann (-Green) function // J. Math. Anal. Appl.—1970.—№ 29.—P. 91–108.
26. *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными.—М.: Физматлит, 2009.—184 с.
27. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—339 с.
28. *Morad A. M., Zhukov M. Yu.* The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder // Eur. Phys. J. Plus.—2015.—Vol. 130.—Art. 8.
29. *Беспрозванных В. Г., Первадчук В. П.* Нелинейная оптика: учеб. пособие.—Пермь: Изд-во Перм. гос. тех. ун-та, 2011.—200 с.
30. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика.—М.: Мир.—1996.—323 с.
31. *Цернике Ф., Мидвинтер Дж.* Прикладная нелинейная оптика.—М.: Мир.—1976.—261 с.
32. *Isoard M., Kamchatnov A. M. Pavloff N.* Dispersionless Evolution of Inviscid Nonlinear Pulses.—2019.—arXiv: 1912.04559v1 [nlin.PS].—7 p.

33. *Ludford G. S. S.* On an extension of Riemann's method of integration with applications to one-dimensional gas dynamics // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1952.—Vol. 48, № 3—P. 499–510. DOI: 10.1017/S0305004100027900.
34. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.—М.: Советское радио.—1977.—368 с.

Статья поступила 14 декабря 2024 г.

Гетман Вероника Андреевна
Южный федеральный университет,
старший преподаватель кафедры вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vagetman@sfedu.ru
https://orcid.org/0009-0009-3523-5428

Долгих Татьяна Федоровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: dolgikh@sfedu.ru
https://orcid.org/0009-0005-8102-1181

Жуков Михаил Юрьевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: myzhukov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-2870-0397

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 5–20

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR TRANSVERSE NONLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVE

Getman, V. A.[1], Dolgikh, T. F.[1] and Zhukov, M. Yu.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: vagetman@sfedu.ru, dolgikh@sfedu.ru, myuzhukov@mail.ru

Abstract. An asymptotic solution of the boundary value problem for two quasi-linear hyperbolic equations describing the behavior of a transverse electromagnetic wave (TEM wave) in a nonlinear continuous medium is constructed when the dependence of polarization P on the electric field strength E (physical nonlinearity) has the form $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3)$, where χ_1, χ_2, χ_3 are dielectric susceptibility and ε_0 is the dielectric constant of vacuum. The main term of the asymptotics is constructed in two cases: (i) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \to 0$, $\chi_3 = 0$ (anisotropic continuous medium), (ii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 \to 0$ (isotropic continuous medium), although one of the methods used to construct the asymptotics is easily transferred to the case (iii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \to 0$, $\chi_3 \to 0$. In the case of (i), the asymptotics for $\chi_2 \to 0$ is constructed in two ways.

In the first variant, the direct expansion in a series by a small parameter of the exact implicit solution of the boundary value problem is used with the subsequent numerical construction of the explicit solution on the lines of the level of the implicit solution (the main term of the asymptotics of the implicit solution). In the second variant, the expansion into series by parameter is carried out at all stages preceding the construction of an exact implicit solution, which leads to an implicit solution different from the exact one, but the main term of the asymptotics of the new and previous solutions coincide. The equivalence of these two options is far from obvious, in particular, the exact implicit solution contains the hypergeometric Gauss function, and the asymptotic implicit solution contains the Bessel function. In the case of (ii), the asymptotics at $\chi_3 \to 0$ can be constructed only in the second way, by performing parameter decomposition at all stages of constructing an implicit solution. The first variant of constructing the asymptotics is indispensable to them, due to the fact that an exact implicit solution cannot be constructed. The hodograph method, based on the conservation law for a system of two quasi-linear hyperbolic equations of type $1+1$ in partial derivatives of the first order, was used to construct a solution to the problem of the behavior of TEM waves , both exact and asymptotic. The method allows to transform a system of quasi-linear equations into one linear partial differential equation of the second order with variable coefficients. The effectiveness of the method depends on the presence of explicit relations connecting the initial variables with the Riemann invariants, as well as on the presence of an explicit expression for the Riemann–Green function of a linear differential equation. In cases (i), (ii) the specified conditions are valid. The presented results allow us to trace in detail the evolution of TEM waves in nonlinear media, for example, in coaxial waveguides or distributed ideal transmission lines, in particular, to determine the time (and spatial coordinate) at which the occurrence of shock electromagnetic waves is possible.

Keywords: systems of quasi-linear hyperbolic equations, Riemann invariants, Riemann–Green function, hodograph method, asymptotic expansions.

AMS Subject Classification: 35F15, 35L40, 41A58.

For citation: *Getman, V. A., Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu.* Asymptotics of the Solution of a Boundary Value Problem for Transverse Nonlinear Electromagnetic Wave, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 5–20 (in Russian). DOI: 10.46698/e7486-7095-0322-l.

References

1. *Zhukov, M. Yu., Shiryaeva, E. V. and Dolgikh, T. F. Metod godografa dlya resheniya giperbolicheskih i ellipticheskih kvazilineynyh uravneniy* [The Hodograph Method for Solving Hyperbolic and Elliptic Quasi-Linear Equations], Rostov-on-Don, Publishing House of the Southern Federal University, 2015, 126 p. (in Russian).
2. *Senashov, S. I. and Yakhno, A.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity, *SIGMA*, 2012, vol. 8, 071, 16 p.
3. *Rozhdestvensky, B. L. and Yanenko, N. N. Sistemy kvazilineynyh uravneniy* [Systems of Quasi-Linear Equations], Moscow, Nauka, 1978, 668 p. (in Russian).
4. *Kataev, I. G. Udarnye elektromagnitnye volny* [Shock Electromagnetic Waves], Moscow, Soviet Radio Publishing House, 1963, 152 p. (in Russian).
5. *Gaponov, A. V., Ostrovsky, L. A. and Freidman, G. I.* Shock Electromagnetic Waves, *News of Universities. Radiophysics*, 1967, vol. 10, no. 9, pp. 1376–1413 (in Russian).
6. *Zhuravlev, V. M.* Multidimensional Nonlinear Wave Equations with Multivalued Solutions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 174, no. 2. pp. 236–246. DOI: 10.1007/s11232-013-0020-6.
7. *Zhuravlev, V. M.* Breaking Electromagneticwaves in a Strongly Nonlinear Medium, *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3 (27), pp. 117–135 (in Russian).
8. *Zhuravlev, V. M.* Multidimensional Quasilinear First-Order Equations and Multivalued Solutions of the Elliptic and Hyperbolic Equations, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2016, vol. 186, no. 3, pp. 320–332. DOI: 10.1134/S0040577916030028.
9. *Tsarev, S. P.* The Geometry of Hamiltonian Systems of Hydrodynamic Type. The Generalized Hodograph Method, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1991, vol. 37, no. 2, pp. 397–419. DOI: 10.1070/IM1991v037n02ABEH002069.
10. *Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu.* Variants of the Hodograph Method for Solving a System of Two Quasilinear Equations, Vladikavkaz Mathematical Journal, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 34–50. (in Russian). DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-l.

11. *Landau, L. D. and Lifshits, E. M. Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie dlya vuzov v 10 tomakh. Tom VIII. Elektrodinamika sploshnyh sred* [Theoretical Physics: a Textbook for Universities in 10 Volumes. Vol. VIII. Electrodynamics of Continuous Media], 4-e izdanie, Moscow, Fizmatlit, 2005, 656 p. (in Russian).
12. *Donato, A. and Fusco, O. D.* Some Applications of the Riemann Method to Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Media, *ZAMM 60*, 1980, pp. 539–542.
13. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations*, 2014, arXiv: 1410.2832.
14. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations*, 2014, arXiv: 1503.01762.
15. *Shiryaeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations*, 2014, arXiv: 1512.06710.
16. *Dolgikh, T. F.* THE Solution of the Mass Transfer Problem for The Two-Component Mixture Under the Action of an Electric Field, *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2017, no. 3-1 (195-1), pp. 28–35 (in Russian). DOI: 10.23683/0321-3005-2017-3-1-28-35.
17. *Dolgikh, T. F.* The Hodograph Method for Solving the Problem of Shallow Water Under a Solid Lid, *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2021, no. 1, pp. 15–24 (in Russian). DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-15-24
18. *Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu.* Mathematical Models of Liquid, Gas and Electric Field Transport in Multicomponent Chemically Active Media, *Mathematical Forum. Vol. 13. Contemporary Problems of Mathematics and Mathematical Education*, Trends in Science, The South of Russia, 2020, pp. 87–104 (in Russian).
19. *Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu.* Hodograph Method for Solving the Problem on Shallow Water under a Solid Cover in the Case of Hyperbolic Equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, vol. 86, no. 1, pp. 18–34 (in Russian). DOI: 10.31857/S0032823522010039.
20. *Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu.* The Hodograph Method for Solving the Overturned Shallow Water Problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 1, pp. 106–116. DOI: 10.1134/S0965542522010067.
21. *Courant, R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Moscow, Mir, 1964, 830 p. (in Russian).
22. *Copson, E. T.* On the Riemann–Green Function, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
23. *Ibragimov, N. H.* Group Analysis of Ordinary Differential Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics, *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4. pp. 89–156. DOI: 0.1070/RM1992v047n04ABEH000916.
24. *Zeitsch, P. J.* On the Riemann Function, *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 316, DOI: 10.3390/math6120316.
25. *Daggit, E. A.* The Use of Infinitesimal Transformations in Predicting the Form of the Riemann (-Green) Function, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1970, no. 29. pp. 91–108.
26. *Kaptsov, O. V. Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Methods of Integration of Partial Differential Equations], Moscow, Fizmatlit, 2009, 184 p. (in Russian).
27. *Ovsyannikov, L. V. Gruppovoy analiz differencial'nyh uravneniy* [Group Analysis of Differential Equations], Moscow, Nauka, 1978, 339 p. (in Russian).
28. *Morad, A. M. and Zhukov, M. Yu.* The Motion of a Thin Liquid Layer on the Outer Surface of a Rotating Cylinder, *European Physical Journal Plus*, 2015, vol. 130, art. 8.
29. *Besprozvannykh, V. G. and Pervadchuk, V. P. Nelineynaya optika* [Nonlinear Optics], Perm, Publishing House of Perm State Technical University, 2011, 200 p. (in Russian).
30. *Agrawal, G. Nelineynaya volokonnaya optika* [Nonlinear Fiber Optics], Moscow, Mir, 1996, 323 p. (in Russian).
31. *Zernike, F. and Midwinter, J. Prikladnaya nelineynaya optika* [Applied Nonlinear Optics], Moscow, Mir, 1976, 261 p. (in Russian).
32. *Isoard, M., Kamchatnov, A. M. and Pavloff, N.* Dispersionless Evolution of Inviscid Nonlinear Pulses, 2019, arXiv: 1912.04559v1 [nlin.PS], 7 p.
33. *Ludford, G. S. S.* On an Extension of Riemann's Method of Integration with Applications to One-Dimensional Gas Dynamics, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1952, vol. 48, no. 3, pp. 499–510. DOI: 10.1017/S0305004100027900.
34. *Scott, E. Volny v aktivnyh i nelineynyh sredakh v prilozhenii k elektronike* [Waves in Active and Nonlinear Media in Application to Electronics], Moscow, Soviet radio. 1977. 368 p. (in Russian).

Received December 14, 2024

Veronika A. Getman
Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: vagetman@sfedu.ru
https://orcid.org/0009-0009-3523-5428

Tatiana F. Dolgikh
Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Assistant Professor
E-mail: dolgikh@sfedu.ru
https://orcid.org/0009-0005-8102-1181

Mikhail Yu. Zhukov
Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia
Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: myuzhukov@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2870-0397