Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 3, С. 72–85

УДК 517.983
DOI 10.46698/f8294-3012-1428-w

ОПИСАНИЕ ЯДРА ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РУМЬЕ

Д. А. Полякова[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: forsites1@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются операторы свертки в пространствах Румье ультрадифференцируемых функций нормального типа на числовой прямой. К данному классу пространств относятся известные классы Жевре. В качестве частных случаев операторы свертки включают в себя дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы. На основании предшествующих результатов для пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа и связи между пространствами Берлинга и Румье было установлено, что для сюръективности оператора свертки в пространстве Румье нормального типа необходимо медленное убывание символа оператора относительно весовой функции, задающей пространство. В настоящей работе при условии медленного убывания символа установлено изоморфное описание ядра оператора свертки в виде пространства последовательностей функционалов, а также в виде пространства числовых последовательностей. С помощью теорем об изоморфном описании построен абсолютный базис в пространстве всех решений однородного уравнения свертки. Данные результаты не только представляют самостоятельный интерес, но и являются необходимым шагом для исследования вопроса о сюръективности оператора свертки в пространстве Румье нормального типа, который к настоящему времени не изучен.

Ключевые слова: ультрадифференцируемые функции, оператор свертки, ядро оператора.

AMS Subject Classification: 44A35, 46E10.

Образец цитирования: *Полякова Д. А.* Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 72–85. DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w.

1. Введение

Пусть ω — весовая функция; $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ — пространство Румье ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа $p \in (0, \infty)$ на числовой прямой; T_μ — оператор свертки, действующий в $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$; μ — его символ (целая функция с определенными ограничениями роста). Основной целью работы является описание ядра $\ker T_\mu$ оператора T_μ в виде некоторого пространства последовательностей. Данная задача, во-первых, представляет самостоятельный интерес, поскольку позволяет построить базис в $\ker T_\mu$ и, соответственно, выписать общее решение однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в пространстве $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Во-вторых, в случае пространств Румье (в отличие от двойственного случая пространств Берлинга) она является необходимым предварительным шагом для исследования проблемы сюръективности оператора T_μ или, другими словами, проблемы разрешимости неоднородного уравнения $T_\mu f = g$ в $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Заметим, что обе приведенные задачи уже успешно решены в пространствах Румье $\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ минимального типа (см. [1–3]).

Операторы свертки в пространствах Румье нормального типа к настоящему времени практически не изучены. Даже проблема характеризации их символов оказалась достаточно сложной (она была решена в [4]). Далее, недавно в работе [5] на основании связи между пространствами Берлинга и Румье УДФ удалось установить одно из необходимых условий сюръективности оператора T_μ в пространстве $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ — медленное убывание символа μ. Это вместе с предшествующими результатами сделало возможным исследование $\ker T_\mu$ в $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Следует отметить, что настоящее исследование существенным образом опирается на работу [6]. Несмотря на то, что указанная работа была посвящена общему решению однородного уравнения свертки в пространствах Берлинга нормального типа на числовой прямой, в качестве символов рассматривались (по техническим причинам) именно целые функции, являющиеся символами операторов свертки в пространствах Румье $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Соответственно, вся предварительная работа по группировке близко расположенных нулей символа уже была проведена.

Принципиальным отличием случая Румье, помимо сложной топологической структуры рассматриваемых пространств, следует, на наш взгляд, считать необходимость построить в ходе доказательства решение $\overline{\partial}$-задачи, которое вместо одной весовой оценки будет удовлетворять системе весовых оценок. В связи с этим, вместо классического результата Хермандера, который применялся во всех предшествующих работах, здесь используется его обобщение из [4].

Основными результатами работы следует считать теоремы 1–3. В теоремах 1 и 2 установлено изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства последовательностей функционалов и пространства числовых последовательностей, соответственно. В теореме 3 выписан базис в пространстве всех решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в пространстве $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

В заключение заметим, что задачу об общем решении уравнения свертки следует считать классической. Учитывая, что, как хорошо известно, уравнения свертки включают как частные случаи дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные уравнения, отправной точкой здесь следует считать классические работы Эйлера. В дальнейшем данной задачей занимались многие математики, рассматривая операторы свертки как в пространствах бесконечно дифференцируемых, так и в пространствах аналитических и обобщенных функций (см., например, [7–9]).

2. Пространства Румье и операторы свертки

Под весовой функцией, как обычно, будем понимать непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющую условиям:

(α) $(\forall\, p > 1)$ $(\exists\, C > 0)$: $\big(\omega(x+y) \leqslant p\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C\big)$ $(\forall x, y \geqslant 0)$;

(α') $\omega(t) = O(t)$, $t \to \infty$;

(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big)$, $t \to \infty$;

(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Считаем для удобства, что $\omega(1) = 0$, и продолжаем функцию ω в $\mathbb{C}$ радиальным образом: $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Вводим функцию $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geqslant 0\}$, $y \geqslant 0$.

В дальнейшем нам понадобятся два следующих важных свойства весовых функций (см., например, [5]):

$$\omega(t) \leqslant At, \quad t \geqslant 0; \tag{1}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega\big((1+\delta)t\big)}{\omega(t)} = 1. \tag{2}$$

Пространством Румье УДФ типа $p \in [0,\infty)$ называется пространство

$$\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \Bigg\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ (\forall\, l \in (0,\infty))\ (\exists\, q \in (p,\infty)) : \\ |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(\frac{j}{q})} < \infty \Bigg\}.$$

Оно наделяется смешанной проективно-индуктивной топологией

$$\operatorname*{proj}_{l\in(0,\infty)} \operatorname*{ind}_{q\in(p,\infty)} E_{\omega,q,l}$$

полунормированных пространств $E_{\omega,q,l} = \big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ |f|_{\omega,q,l} < \infty \big\}$.

При $p = 0$ естественно говорить о пространствах Румье минимального типа (они изучались, в частности, в [1–3], а при $p \in (0,\infty)$ — о пространствах нормального типа (см. [4–6]).

Простое равенство $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) = \mathscr{E}^1_{\{p\omega\}}(\mathbb{R})$, $p \in (0,\infty)$, позволяет при исследовании пространств нормального типа ограничиться случаем $p = 1$.

В [10, предложение 4.9] было показано, что пространство $\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ ядерно, полно и рефлексивно. Аналогично проверяется, что $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ обладает теми же свойствами.

Как известно, сильное сопряженное $\big(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'_\beta$ к пространству $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ топологически изоморфно следующему весовому пространству целых функций:

$$H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \Bigg\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ (\exists\, l \in (0,\infty)) : \ (\forall\, q \in (1,\infty)) \\ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty \Bigg\},$$

наделенному топологией $\operatorname{ind}_{l\in(0,\infty)}\operatorname{proj}_{q\in(1,\infty)} H_{\omega,q,l}$. Здесь $H_{\omega,q,l} = \big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\omega,q,l} < \infty \big\}$ — банахово пространство. Топологический изоморфизм между $\big(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'_\beta$ и $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ устанавливает преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$F : \varphi \in \Big(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\Big)' \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пространство $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, в отличие от пространства $H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \simeq \big(\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'_\beta$, очевидно, не является алгеброй относительно обычной операции умножения функций. В соответствии с [4, теорема 4], множеством всех мультипликаторов пространства $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, т. е. тех целых функций μ, для которых $\mu H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \subset H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, является

$$M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) = \big\{ \mu \in H(\mathbb{C}) : \ (\exists\, l_0 \in (0,\infty)) : \ (\forall\, \varepsilon \in (0,\infty)) \ \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l_0} < \infty \big\}.$$

При этом каждый такой мультипликатор непрерывен, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$.

Заметим сразу (см. [11]), что в определении пространств $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ и $M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ можно при необходимости заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.

Для $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ вводится следующим образом:

$$(T_\mu f)(x) := \langle \psi_\mu, f(x+\cdot)\rangle, \quad x \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}).$$

Здесь $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$. При этом T_μ является сопряженным к Λ_μ и действует линейно и непрерывно в $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Точно так же, как в [12, теорема 2], проверяется, что если символ $\mu(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(-i)^k z^k$ удовлетворяет условию: $\|\mu\|_{\omega,\varepsilon,0} < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$, то оператор T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: $T_\mu f = \sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)}$, $f \in \mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

В силу [5, теорема 5], для сюръективности оператора T_μ в $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ необходимо выполнение условия:

$$(D) \quad (\forall\,\varepsilon \in (0,\infty))\ \ (\forall\,\delta \in (0,\infty))\ \ (\exists\,R_0 > 0) : (\forall\,x \in \mathbb{R})\ \text{ с }\ |x| \geqslant R_0\ \ (\exists\,w \in \mathbb{C}) :$$
$$|w - x| \leqslant \delta\omega(x)\ \ \textit{и}\ \ |\mu(w)| \geqslant \exp\big\{-\varepsilon\omega(w)\big\}.$$

Следуя Эренпрайсу, данное условие будем, как обычно, называть условием медленного убывания μ (относительно ω). Из [11, теорема 2] и [6, лемма 1] вытекает, что условие (D) эквивалентно условию

(SC_0) $(\forall\,\varepsilon > 0)$ $\big(\exists\,\delta = \frac{\varepsilon}{64KHel_0} > 0\big)$ $(\exists\,r_0 > 0)$: *каждую точку* $z \in \mathbb{C}$ *с* $|z| \geqslant r_0$ *можно погрузить внутрь окружности* S_z*, обладающей свойствами:*

(a) *если* $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta\omega(\operatorname{Re} z)$*, то для всех* $\zeta \in S_z$

$$\|\zeta - z\| \leqslant 6\delta\omega(\operatorname{Re} z), \quad |\mu(\zeta)| \geqslant \exp\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)\};$$

(b) *если* $|\operatorname{Im} z| > \delta\omega(\operatorname{Re} z)$*, то для всех* $\zeta \in S_z$

$$\|\zeta - z\| \leqslant \left(\frac{3}{4} + 4\beta\right)|\operatorname{Im} z|, \quad |\mu(\zeta)| \geqslant \exp\{-L_0|\operatorname{Im}\zeta|\}.$$

Здесь $\|t\| = \max\{|\operatorname{Im} t|, |\operatorname{Re} t|\}$, $t \in \mathbb{C}$; величина $\beta \in \big(0, \frac{1}{32}\big]$ может быть выбрана произвольно, а константа L_0 зависит лишь от весовой функции ω, числа β и величины l_0 из оценки сверху $|\mu|$ (в [6] константа L_0 выписана явно).

В заключение заметим, что, как нетрудно убедиться, $T_\mu(e^{-ixz}) = \mu(z)e^{-ixz}$, $z \in \mathbb{C}$. Соответственно, если λ_s — нуль символа μ, то функция $e^{-i\lambda_s x}$ будет решением однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$. Если k_s — кратность нуля λ_s, то решениями этого уравнения будут все функции $x^l\,e^{-i\lambda_s x}$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$. Хорошо известно, что в общем случае эти решения могут не образовывать базис в пространстве всех решений однородного уравнения. Близко расположенные нули символа и соответствующие им элементарные решения необходимо группировать. Более подробно группировка нулей будет обсуждаться в следующем параграфе.

3. Изоморфная реализация $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$

Пусть $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Обозначим $J := \operatorname{Im}\Lambda_\mu = \mu H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Поскольку ядро $\ker T_\mu$ сюръективного оператора свертки T_μ стандартным образом будет изоморфно пространству $\big(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\big)'_\beta$, настоящий параграф посвящен описанию пространств $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ и $\big(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\big)'_\beta$.

Начнем со следующей леммы.

Лемма 1. *Для утверждений*

(i) μ удовлетворяет условию (SC_0);

(ii) μ — делитель $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, т. е. $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C}) \ \Rightarrow \frac{f}{\mu} \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$;

(iii) главный идеал J замкнут в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$

справедливы импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

$\lhd$ Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ такую, что $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$. Так как $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, то $\|f\|_{\omega,q,l_1} < \infty$ при некотором $l_1 \in (0,\infty)$ и всех $q \in (1,\infty)$.

Зафиксируем какое-нибудь $\beta \in \left(0, \frac{1}{32}\right]$ и найдем соответствующую ему константу L_0 из условия (SC_0). Далее, для произвольного $q \in (1,\infty)$ выбираем $q_1 \in (1,q)$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}(q-q_1)\right]$. Пользуясь условием (SC_0), находим соответствующие δ и r_0. Здесь следует заметить, что ε и, как следствие, δ можно при необходимости уменьшить.

В результате каждую точку $z \in \mathbb{C}$ можно погрузить внутрь окружности S_z, на которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geqslant \exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - L_0|\operatorname{Im}\zeta|\big\}, \quad \zeta \in S_z.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant \|f\|_{\omega,q_1,l_1} \exp\big\{(q_1+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\zeta) + (l_1+L_0)|\operatorname{Im}\zeta|\big\}, \quad \zeta \in S_z.$$

Учитывая оценки $\operatorname{diam} S_z$ из условия (SC_0), а также свойства (1), (2) весовых функций, из этого стандартным образом получаем, что при некоторых $C > 0$ и $L_1 > 0$ для всех $\zeta \in S_z$ справедлива оценка

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant C \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z) + L_1|\operatorname{Im} z|\big\}.$$

Значит, такая же оценка имеет место и внутри окружности S_z и, в частности, в точке z. Итак, $\frac{f}{\mu} \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$.

Доказательство импликации $(ii) \Rightarrow (iii)$ совершенно стандартное. $\rhd$

Рассмотрим в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ замкнутый (благодаря условию (SC_0)) главный идеал J, порождаемый символом μ. Очевидно, что если $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции μ и k_s — кратность нуля λ_s, то

$$J = \left\{g \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \,:\, g^{(l)}(\lambda_s) = 0,\ l = 0,\dots,k_s-1,\ s = 1,2,\dots\right\}.$$

Мы рассматриваем случай бесконечного числа нулей μ, поскольку если их конечное число, то $\ker T_\mu$, как нетрудно понять, будет конечномерным.

В [6, § 4] для целой функции $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию (SC_0), было построено специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ нулей символа μ. Построение проводилось по произвольной числовой последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$. Множества U_j конструировались группами $j_k \leqslant j < j_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ $(j_0 = 1)$. На U_j для $|\mu|$ выполнялись следующие оценки сверху:

$$\ln|\mu(z)| < -\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - L_0|\operatorname{Im} z|, \quad z \in U_j,\ j_k \leqslant j < j_{k+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Здесь, напомним, L_0 — константа из условия (SC_0).

Далее, там же было показано, что если

$$\sigma_j := \min_{\zeta\in\overline{U_j}} \exp\big\{ -4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\zeta) - 4L_0|\operatorname{Im}\zeta|\big\}, \quad j_k \leqslant j < j_{k+1}, \tag{3}$$

то для всех $z \in (\partial U_j)(\sigma_j) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) < \sigma_j\}$, $j_k \leqslant j < j_{k+1}$, выполняется неравенство

$$\ln|\mu(z)| \geqslant -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z|. \tag{4}$$

Наконец, в каждой компоненте U_j специальным образом выбиралась точка z_j, через которую оценивались размеры множества U_j (см. [6, леммы 2 и 3]).

Основная цель настоящего параграфа — получить изоморфное описание $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ в виде пространства последовательностей. Данный результат в целом схож с аналогичным результатом для пространств Берлинга УДФ нормального типа [6, лемма 7]. Отличительными особенностями, как уже говорилось во введении, являются топологическая структура (индуктивно-проективная вместо чисто индуктивной), а также необходимость иметь решение $\overline{\partial}$-задачи, удовлетворяющее семейству весовых оценок. В связи с этим мы приведем доказательство кратко, делая упор только на новые детали.

Пусть, как в [6, § 5], $H^\infty(U_j)$ — пространство всех аналитических ограниченных на U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup\{|g(z)| : z \in U_j\}$; $J_j = \{g \in H^\infty(U_j) : g^{(l)}(\lambda_s) = 0,$ $l = 0, \dots, k_s - 1,\ \lambda_s \in U_j\}$; $X_j := H^\infty(U_j)/J_j$; $|||[f]|||_{\infty,j} = \inf_{g\in H^\infty(U_j)} \sup_{z\in U_j} |f(z) + \mu(z)g(z)|$ — факторнорма в X_j и $X := \prod_{j=1}^\infty X_j$. При этом $\dim X_j = \sum_{\lambda_s\in U_j} k_s =: m_j$.

Введем следующее подпространство пространства X:

$$k^\infty = \left\{\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in X \,:\, (\exists\, l \in (0,\infty)) : (\forall\, q \in (1,\infty)) \right.$$
$$\left. \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\geqslant 1} \frac{|||[\varphi_j]|||_{\infty,j}}{\exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\}} < \infty \right\}.$$

Данное пространство наделим естественной топологией внутреннего индуктивного предела пространств Фреше $K_{\omega,l} := \operatorname{proj}_{q\in(1,\infty)} k_{\omega,q,l}$, где $k_{\omega,q,l} := \big\{\varphi \in X : \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} < \infty\big\}$. Нетрудно проверить, что $K_{\omega,l}$ компактно вложено в K_{ω,l_1} при $0 < l < l_1 < \infty$, так что k^∞ относится к известному классу (DFS)-пространств (см. [13]).

Лемма 2. *Отображение*

$$\rho : [f] \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^\infty$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ *и* k^∞.

$\lhd$ 1) Начнем с доказательства непрерывности отображения ρ. Поскольку топология в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ совпадает с индуктивно-проективной топологией $\operatorname{ind}_{l\in(0,\infty)}\operatorname{proj}_{q\in(1,\infty)}\widetilde{H}_{\omega,q,l}$ банаховых пространств

$$\widetilde{H}_{\omega,q,l} := \left\{[f] \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J \,:\, \widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l} = \inf_{g\in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})} \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z) + \mu(z)g(z)|}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\}} < \infty\right\},$$

то, в силу [14, теорема 6.5.1], нам достаточно проверить справедливость условия:

$$(\forall\, l \in (0,\infty))\ \ (\exists\, l_1 \in (0,\infty)) : \ \ (\forall\, q_1 \in (1,\infty))\ \ (\exists\, q \in (1,\infty))\ \ (\exists\, C > 0) :$$
$$\widetilde{|\rho[f]|}_{\omega,q_1,l_1} \leqslant C\, \widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l} \ \ (\forall\, [f] \in \widetilde{H}_{\omega,q,l}).$$

Зафиксируем произвольное $l \in (0,\infty)$ и положим $l_1 := 3l + 4A$, где A — константа, определяемая условием (1). Далее, для $q_1 \in (1,2)$ выберем какое-нибудь $q \in (1,q_1)$. Пользуясь [6, лемма 3], найдем $C_1 > 0$ такое, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$

$$q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant q_1\omega(\operatorname{Re} z_j) + (2Aq_1 + 3l)|\operatorname{Im} z_j| + C_1 \leqslant q_1\omega(\operatorname{Re} z_j) + l_1|\operatorname{Im} z_j| + C_1.$$

Тогда для любого класса $[f] \in \widetilde{H}_{\omega,q,l}$ имеем, что

$$\begin{aligned}|||[f|_{U_j}]|||_{\infty,j} &\leqslant \inf_{h\in J_j}\sup_{z\in U_j}\frac{|f(z)+h(z)|}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\}}\cdot\sup_{z\in U_j}\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\}\\ &\leqslant \widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l}\cdot e^{C_1}\cdot\exp\{q_1\omega(\operatorname{Re} z_j) + l_1|\operatorname{Im} z_j\}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\widetilde{|\rho[f]|}_{\omega,q_1,l_1} \leqslant e^{C_1}\widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l}$, что и требовалось.

2) Проверим теперь сюръективность отображения ρ. Поскольку именно данный пункт доказательства содержит существенные отличия от [6], мы приведем его достаточно подробно.

Возьмем $\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{\infty}$. Тогда $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l_1} < \infty$ при некотором $l_1 \in (0,\infty)$ и всех $q \in (1,\infty)$. Выберем в каждом классе $[\varphi_j]$, $j \in \mathbb{N}$, функцию $\varphi_j \in H^{\infty}(U_j)$ такую, что $|||[\varphi_j]|||_{\infty,j} = \|\varphi_j\|_{\infty,j}$.

Установим сначала некоторые вспомогательные оценки для $|\varphi_j|$ и $|\mu|$. Пользуясь снова [6, лемма 3], найдем $C_k > 1$, при которых для всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$ справедливо неравенство

$$(1+\varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z_j) + l_1|\operatorname{Im} z_j| \leqslant (1+2\varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z) + \big(3l_1 + 2A(1+2\varepsilon_k)\big)|\operatorname{Im} z| + \ln C_k\,.$$

Считая $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ и полагая $l_2 := 3l_1 + 4A$, получим, что

$$|\varphi_j(z)| \leqslant C_k\cdot\widetilde{|\varphi|}_{\omega,1+\varepsilon_k,l_1}\cdot\exp\{(1+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + l_2|\operatorname{Im} z|\},\quad z \in U_j. \tag{5}$$

Напомним, что для $|\mu|$ на множествах $(\partial U_j)(\sigma_j)$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется оценка (4). Учитывая, что $\varepsilon_k \downarrow 0$, и полагая

$$\ln\widetilde{C}_k := \max\{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z):\ z \in U_j,\ 1 \leqslant j < j_k\},\quad k \geqslant 2, \tag{6}$$

из (4) имеем, что

$$\ln|\mu(z)| \geqslant -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z| - \ln\widetilde{C}_k,\quad z \in U_j,\ j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Наконец, снова применяя [6, лемма 3], найдем $\overline{C}_k > 1$ такое, что для любых $\zeta, z \in U_j$, $j \in \mathbb{N}$, выполняются неравенства:

$$4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\zeta) + 4L_0|\operatorname{Im}\zeta| \leqslant 6\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) + l_3|\operatorname{Im} z| + 2\ln\overline{C}_k,\quad k \in \mathbb{N},$$

где $l_3 := 36L_0 + 12A$. На основании данной оценки и равенств (3) и (6) окончательно получаем, что

$$\sigma_j \geqslant -\overline{C}_k^2\,\widetilde{C}_k^2\,\exp\{-6\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - l_3|\operatorname{Im} z|\},\quad z \in U_j,\ j \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Функция $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ такая, что $\rho[f] = \varphi$, строится по сути так же, как в [6, лемма 7]. Нам потребуется лишь получить новые оценки на f, из которых будет вытекать, что

$f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Пусть V_j, g, $\widetilde{C}$, Φ и h те же, что в [6, лемма 7]. Вместо неравенства (5.3) работы [6], из (8) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant \widehat{C}_k \exp\left\{6\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + l_3|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad z \in U_j \setminus V_j,\ j \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где $\widehat{C}_k := \widetilde{C} \cdot \overline{C}_k^2 \cdot \widetilde{C}_k^2$. Далее, из (5), (7) и (9) получаем, что для $z \in U_j \setminus V_j$, $j \in \mathbb{N}$, имеют место оценки

$$|h(z)| \leqslant M_k \exp\left\{(1 + 11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где $L_1 := 3L_0 + l_2 + l_3$, $M_k := C_k \cdot \widetilde{C}_k \cdot \widehat{C}_k$. Поскольку $h(z) = 0$ для $z \notin \bigcup_j (U_j \setminus V_j)$, заключаем, что оценки (10) справедливы всюду в $\mathbb{C}$.

Применяя теорему 1 из [4], находим измеримую функцию v такую, что $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = h$ и что

$$|v(z)| \leqslant N_k \exp\left\{(1 + 11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Полагая теперь стандартным образом $f(z) := v(z)\mu(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$, получим, что $f \in H(\mathbb{C})$. А из неравенств (5), (11) и априорной оценки сверху на $|\mu|$ вытекает, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leqslant \|\mu\|_{\omega,\varepsilon_k,l_0} \cdot N_k \cdot \exp\left\{(1 + 11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\right\} \\ + C_k \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,1+\varepsilon_k,l_1} \cdot \exp\left\{(1 + 2\varepsilon_k)\omega(z) + l_2|\operatorname{Im} z|\right\}.$$

Учитывая, что константы l_0, L_1 и l_2 определяются исключительно символом μ и элементом $\varphi \in k^\infty$, заключаем, что $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. При этом $f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s)$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, $\lambda_s \in V_j$, так что $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ в X_j, $j \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\rho([f]) = \varphi$.

3) Инъективность отображения ρ очевидна, а непрерывность ρ^{-1} вытекает из теоремы Гротендика об открытом отображении, поскольку $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ является $(\mathscr{U}\mathscr{F})$-пространством, а k^∞ — пространством типа (β) (как отделимый индуктивный предел пространств Фреше) (см. [15, Приложение 1 Д. А. Райкова]). $\rhd$

Следствие. *Отображение* ρ' *является топологическим изоморфизмом* $(k^\infty)'_\beta$ *на* $\left(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$.

4. Изоморфная реализация $\ker T_\mu$

В данном параграфе содержатся основные результаты работы о $\ker T_\mu$. Сначала выпишем стандартный изоморфизм между $\ker T_\mu$ и пространством $\left(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$.

Лемма 3. *Если* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию* (SC_0), *то отображение* $\Phi : \ker T_\mu \to \left(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'$, *определенное правилом*

$$\langle \Phi f, [g] \rangle = \left\langle f, F^{-1}(g) \right\rangle, \quad f \in \ker T_\mu,\ [g] \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ *и* $\left(H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$. (*Здесь, напомним,* F *— преобразование Фурье — Лапласа функционалов из* $\left(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$).

$\lhd$ В силу условия (SC_0), главный идеал J замкнут в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Следовательно, $J_1 := F^{-1}(J)$ — замкнутое подпространство в $\left(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'_\beta$. Как известно, $\ker T_\mu = J_1^\circ = J_1^\perp$ в $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Из рефлексивности пространства $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и общих результатов теории двойственности (см., например, [16]) вытекает, что $\big((\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}))'/J_1\big)'_\beta$ можно отождествить с $J_1^\perp$ с помощью билинейной формы

$$\langle f, [\varphi + J_1]\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \quad f \in \mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}),\ \varphi \in \big(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'.$$

Для того чтобы получить утверждение леммы, остается применить преобразование Фурье — Лапласа функционалов из $\big(\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'$. $\rhd$

Из леммы 3 и следствия леммы 2 вытекает

Лемма 4. *Если $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (SC_0), то отображение $(\rho')^{-1}\circ\Phi$ устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ и пространством $(k^\infty)'_\beta$.*

Таким образом, нам остается лишь получить описание пространства $(k^\infty)'_\beta$. Для этого рассмотрим пространства X'_j — сопряженные к пространствам X_j. Они, как и X_j, являются банаховыми; норма в X'_j имеет вид

$$|||\nu|||'_{\infty,j} = \sup\big\{|\nu([\varphi])| :\ [\varphi] \in X_j,\ |||[\varphi]|||_{\infty,j} \leqslant 1\big\}.$$

Кроме того, $\dim X'_j = m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, положим $X' := \prod_{j=1}^\infty X'_j$ и

$$\lambda^\infty = \Big\{\nu = (\nu_j)_{j=1}^\infty \in X' :\ (\forall\, l \in (0,\infty))\ (\exists\, q \in (1,\infty)) : \\ \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\geqslant 1} |||\nu_j|||'_{\infty,j} \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\} < \infty\Big\}.$$

Данное пространство наделяется топологией $\operatorname{proj}_{l\in(0,\infty)} \Lambda_{\omega,l}$ пространств $\Lambda_{\omega,l}$, представляющих собой индуктивные пределы банаховых пространств. Поскольку $\Lambda_{\omega,l}$ компактно вложено в Λ_{ω,l_1} при $0 < l_1 < l$, то λ^∞ — (FS)-пространство.

Введем стандартные отображения:

$$s_j :\ [\varphi_j] \in X_j \mapsto (0,\dots,0,\underset{j}{[\varphi_j]},0,\dots) \in k^\infty;$$

$$t_j :\ \nu_j \in X'_j \mapsto (0,\dots,0,\underset{j}{\nu_j},0,\dots) \in \lambda^\infty.$$

Нетрудно проверить, что для каждого $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty$ из пространства k^∞ ряд $\sum_{j=1}^\infty s_j([\varphi_j])$ абсолютно сходится к φ в этом пространстве. Действительно, возьмем какое-нибудь $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$ и найдем $l_1 \in (0,\infty)$, при котором $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1} < \infty$ для всех $q_1 \in (1,\infty)$. Пусть теперь $q \in (1,\infty)$ произвольно, а $q_1 \in (1,q)$. Положим $\varepsilon := q - q_1$, $l := l_1 + \varepsilon$. Тогда

$$\sum_{j=1}^\infty \widetilde{|s_j([\varphi_j])|}_{\omega,q,l} = \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1} \cdot \sum_{j=1}^\infty \exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}.$$

В силу [6, следствие 1 из леммы 4], последний числовой ряд сходится. Таким образом, ряд $\sum_{j=1}^\infty s_j([\varphi_j])$ сходится абсолютно в k^∞.

Лемма 5. *Отображение $S : \nu \in (k^\infty)' \mapsto (\nu\circ s_j)_{j=1}^\infty$ является топологическим изоморфизмом $(k^\infty)'_\beta$ на λ^∞.*

$\triangleleft$ Из установленного выше разложения $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$ в k^{∞}, очевидно, вытекает инъективность отображения S.

Для того чтобы доказать сюръективность S, возьмем $\Theta = (\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ из λ^{∞} и положим

$$\nu(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j([\varphi_j]), \quad \varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in k^{\infty}.$$

Пусть $1 < q_1 < q$ произвольны, а $\varepsilon := q - q_1$. Далее, пусть $l_1 \in (0, \infty)$ — любое, а $l := l_1 + \varepsilon$. Для $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in K_{\omega,l_1}$ имеем:

$$|\nu(\varphi)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j([\varphi_j])| \leqslant |\widetilde{\Theta}|'_{\omega,q,l} \cdot |\widetilde{\varphi}|_{\omega,q_1,l_1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}.$$

Последний числовой ряд, как уже говорилось выше, сходится. Таким образом, мы показали, во-первых, что функционал ν непрерывен на каждом K_{ω,l_1}, $l_1 \in (0, \infty)$, и, как следствие, на k^{∞}. Во-вторых, поскольку очевидно, что $S(\nu) = \Theta$, полученные оценки означают, что S^{-1} действует непрерывно из $\Lambda_{\omega,l}$ в K'_{ω,l_1}. Напомним, что здесь l_1 произвольно, а $l = l_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ также можно выбрать произвольным. По общим свойствам индуктивных и проективных пределов это означает, что S^{-1} действует непрерывно из λ^{∞} в $(k^{\infty})'_{\beta}$. Учитывая, что $(k^{\infty})'_{\beta}$ и λ^{∞} — (FS)-пространства, заключаем, что отображение S также непрерывно. $\triangleright$

Из лемм 4 и 5 вытекает

Теорема 1. *Пусть для $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ справедливо условие (SC_0). Тогда $\ker T_\mu$ топологически изоморфно пространству последовательностей λ^{∞}. Топологический изоморфизм устанавливает отображение $L := S \circ (\rho')^{-1} \circ \Phi$.*

Теорема 1 позволяет, во-первых, выписать базис в $\ker T_\mu$. Кроме того, на основании данного результата можно, следуя работам [1] и [3], получить изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей. Этому посвящена оставшаяся часть работы.

Сначала выпишем базис в пространстве λ^{∞}. Из леммы Ауэрбаха [17, лемма 10.5] следует, что в пространствах X_j и X'_j можно выбрать базисы $\{[\varphi_{j,p}] : \ p = 1, \dots, m_j\}$ и $\{\nu_{j,p} : \ p = 1, \dots, m_j\}$ такие, что

$$|||[\varphi_{j,p}]|||_{\infty,j} = |||\nu_{j,p}|||'_{\infty,j} = 1, \quad p = 1, \dots, m_j;$$

$$\langle [\varphi_{j,p}], \nu_{j,m}\rangle = \delta_{pm} = \begin{cases} 1, & p = m, \\ 0, & p \neq m. \end{cases}$$

Лемма 6. *Система*

$$\big\{ t_j(\nu_{j,p}) : \ p = 1, \dots, m_j, \ j \in \mathbb{N} \big\} \tag{12}$$

образует абсолютный базис в пространстве λ^{∞}.

$\triangleleft$ Возьмем произвольное $\nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda^{\infty}$ и покажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{m_j} \langle [\varphi_{j,p}], \nu_j\rangle \, t_j(\nu_{j,p}) \tag{13}$$

сходится абсолютно в λ^∞. Пусть $l \in (0,\infty)$ произвольно. Возьмем $l_1 > l$. Так как $\nu \in \lambda^\infty$, то имеется $q_1 \in (1,\infty)$ такое, что $\widetilde{|\nu|}'_{\omega,q_1,l_1} < \infty$. Пусть $q \in (1,q_1)$. Положим $\varepsilon := \min\{q_1 - q, l_1 - l\}$. Тогда имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} \big|\langle[\varphi_{j,p}],\nu_j\rangle\big| \cdot \widetilde{|t_j(\nu_{j,p})|}'_{\omega,q,l} \leqslant \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q_1,l_1} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}.$$

В силу [6, следствие 1 из леммы 4], последний числовой ряд сходится. Таким образом, ряд (12) сходится абсолютно в каждом $\Lambda_{\omega,l}$, $l \in (0,\infty)$, а значит, в λ^∞. $\triangleright$

Для того чтобы описать $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей, введем в рассмотрение последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ и $(\beta_s)_{s=1}^\infty$, которые получены из $(\omega(\operatorname{Re} z_j))_{j=1}^\infty$ и, соответственно, $(|\operatorname{Im} z_j|)_{j=1}^\infty$ повторением m_j раз элемента $\omega(\operatorname{Re} z_j)$ или $|\operatorname{Im} z_j|$. Далее, положим

$$\lambda^0 := \Big\{x = (x_s)_{s=1}^\infty \subset \mathbb{C}:\ (\forall\, l \in (0,\infty))\ (\exists\, q \in (1,\infty)):$$
$$|x|^0_{\omega,q,l} := \sum_{s=1}^{\infty} |x_s| \exp\{q\alpha_s + l\beta_s\} < \infty\Big\}.$$

Лемма 7. *Пространства λ^∞ и λ^0 топологически изоморфны.*

$\triangleleft$ Очевидно, пространство λ^0 можно отождествить с пространством

$$\lambda^1 := \Big\{x = \big((x_{j,p})_{p=1}^{m_j}\big)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}:\ (\forall\, l \in (0,\infty))\ (\exists\, q \in (1,\infty)):$$
$$|x|^1_{\omega,q,l} := \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} |x_{j,p}| \exp\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\} < \infty\Big\}.$$

Рассмотрим отображения $A: \lambda^1 \to \lambda^\infty$ и $B: \lambda^\infty \to \lambda^1$, действующие по правилам:

$$A:\ x = \big((x_{j,p})_{p=1}^{m_j}\big)_{j=1}^\infty \mapsto \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} x_{j,p} t_j(\nu_{j,p});$$

$$B: \nu = (\nu_j)_{j=1}^\infty \mapsto \Big(\big(\langle\nu_j,[\varphi_{j,p}]\rangle\big)_{p=1}^{m_j}\Big)_{j=1}^\infty.$$

Нетрудно проверить, что $A \circ B = \mathrm{id}_{\lambda^\infty}$, $B \circ A = \mathrm{id}_{\lambda^1}$.

Далее, поскольку при всех $l \in (0,\infty)$ и $q \in (1,\infty)$

$$\widetilde{|Ax|}'_{\omega,q,l} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} |x_{j,p}| \cdot \widetilde{|t_j(\nu_{j,p})|}'_{\omega,q,l} = |x|^1_{\omega,q,l},$$

то отображение A непрерывно. Аналогично, так как для $l \in (0,\infty)$, $q \in (1,\infty)$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|B\nu|^1_{\omega,q,l} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} \big|\langle\nu_j,[\varphi_{j,p}]\rangle\big| \exp\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\}$$
$$\leqslant \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\},$$

то отображение B также непрерывно.

Итак, $\lambda^\infty \simeq \lambda^1 \simeq \lambda^0$. $\triangleright$

Таким образом установлена

Теорема 2. *Если символ μ оператора свертки T_μ удовлетворяет условию (SC_0), то $\ker T_\mu$ топологически изоморфно пространству λ^0 числовых последовательностей.*

В заключение работы выпишем базис в $\ker T_\mu$, т. е. в пространстве всех решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. С этой целью введем в рассмотрение подпространства

$$E_j = \operatorname{span}\left\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x} :\ l = 0, \dots, k_s - 1,\ \lambda_s \in U_j\right\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

пространства всех решений указанного однородного уравнения, натянутые на элементарные решения, соответствующие нулям символа, попадающим в каждое из множеств U_j. Так же, как в [6, лемма 9], проверяется, что $L(E_j) = t_j(X'_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Здесь, напомним, L — изоморфизм из теоремы 1. На основании леммы 6 и теоремы 1 тогда получаем следующий результат.

Теорема 3. *Если $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (SC_0), то в ядре $\ker T_\mu$ оператора свертки T_μ с символом μ, действующего в пространстве $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, имеется абсолютный базис*

$$\left\{e_{j,p} :\ p = 1, \dots, m_j,\ j \in \mathbb{N}\right\},$$

состоящий из элементов $e_{j,p} \in E_j$, $p = 1, \dots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Заметим, что в работе [6] были указаны ситуации, когда группировать нули символа нет необходимости и, соответственно, базис в пространстве всех решений однородного уравнения свертки образуют сами элементарные решения (см. [6, следствия 3 и 4 из теоремы 4]). Поскольку указанные следствия естественным образом остаются верными и в пространстве $\mathscr{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, здесь мы их повторять не будем.

Литература

1. *Meise R.* Sequence space representations for zero-solutions of convolution equations on ultradifferentiable functions of Roumieu type // Studia Math.—1989.—Vol. 92.—P. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
2. *Braun R. W., Meise R., Vogt D.* Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions // Proc. London Math. Soc.—1990.—Vol. 61, № 2.—P. 344–370. DOI: 10.1112/plms/s3-61.2.344.
3. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentialble functions of Roumieu type // Studia Math.—1997.—Vol. 125, № 2.—P. 101–129. DOI: 10.4064/sm-125-2-101-129.
4. *Полякова Д. А.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в проективных весовых пространствах // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—С. 185–198. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.118.
5. *Полякова Д. А.* Об образе оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2024.—Т. 36, № 2.—С. 108–130.
6. *Полякова Д. А.* Общее решение однородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2019.—Т. 31, № 1.—С. 114–142.
7. *Напалков В. В.* О базисе в пространстве решений уравнения свертки // Матем. заметки.—1988.—Т. 43, № 1.—С. 44–55.
8. *Кривошеев А. С.* Базис Шаудера в пространстве решений однородного уравнения свертки // Матем. заметки.—1995.—Т. 57, вып. 1.—С. 57–71.
9. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi* Exponential-polynomial bases for null spaces of convolution operators in $A^{-\infty}$ // Contemp. Math.—2011.—Vol. 547.—P. 1–16.
10. *Brawn R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.

11. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. матем. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 3–20. DOI: 517.547.2+517.982.
12. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. матем. журн.—2012.—Т. 53, № 3.—С. 477–494.
13. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи матем. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
14. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
15. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
16. *Гротендик А.* О пространствах (F) и (DF) // Математика.—1958.—Т. 2, № 3.—С. 81–128.
17. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis.—New York: Oxford Univ. Press, 1997.—(Oxford Grand. Text. Math.; Vol. 2).

Статья поступила 10 июня 2024 г.

Полякова Дарья Александровна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела матем. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: forsites1@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-0202-2102

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 3, P. 72–85

ON KERNELS OF CONVOLUTION OPERATORS IN THE ROUMIEU SPACES OF ULTRADIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Polyakova, D. A.[1,2]
[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: forsites1@mail.ru

Abstract. We consider convolution operators in the Roumieu spaces of ultradiffereniable functions of mean type on the real axis. The famous Gevrey classes are also the Roumieu spaces. As particular cases, convolution operators include the differential equations of infinite order with constant coefficients, difference-differential and integro-differential equations. From recent results for convolution operators in the Beurling spaces of mean type and from the connection between the Roumieu and the Beurling spaces it follows that for the surjectivity of convolution operator it is necessary that the symbol of the operator is slowly decreasing with respect to the weight function. Under this assumption, we obtain the isomorphic description for the kernel of the convolution operator as a sequence space. We also construct an absolute basis in the space of all solutions of the homogeneous convolution equation. These results are of their own interest. On the other hand, they are the necessary step for investigation of the problem of surjectivity of the convolution operator in the Roumieu spaces of mean type.

Keywords: ultradifferentiable functions, convolution operator, the kernel of the operator.

AMS Subject Classification: 44A35, 46E10.

For citation: *Polyakova, D. A.* On Kernels of Convolution Operators in the Roumieu Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 72–85 (in Russian). DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w.

References

1. *Meise, R.* Sequence Space Representations For Zero-Solutions of Convolution Equations on Ultradifferentiable Functions of Roumieu Type, *Studia Mathematica*, 1989, vol. 92, pp. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
2. *Braun, R. W., Meise, R. and Vogt, D.* Existence of Fundamental Solutions and Surjectivity of Convolution Operators on Classes of Ultradifferentiable Functions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1990, vol. 61, pp. 344–370. DOI: 10.1112/plms/s3-61.2.344.
3. *Meyer, T.* Surjectivity of Convolution Operators on Spaces of Ultradifferentialble Functions of Roumieu Type, *Studia Mathematica*, 1997, vol. 125, no. 2, pp. 101–129. DOI: 10.4064/sm-125-2-101-129.
4. *Polyakova, D. A.* Solvability of the Inhomogeneous Cauchy–Riemann Equation in Projective Weighted Spaces, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 142–152. DOI: 10.1134/S0037446617010189.
5. *Polyakova, D. A.* On the Image of the Convolution Operator in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Algebra i Analiz*, 2024, vol. 36, no. 2, pp. 108–130 (in Russian).
6. *Polyakova, D. A.* General Solution of the Homogeneous Convolution Equation in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 85–105. DOI: 10.1090/spmj/1587.
7. *Napalkov, V. V.* A Basis in the Space of Solutions of a Convolution Equation, *Mathematical Notes*, 1988, vol. 43, no. 1, pp. 27–33. DOI: 10.1007/BF01139565.
8. *Krivosheev, A. S.* The Schauder Basis in the Solution Space of a Homogeneous Convolution Equation, *Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 1, pp. 41–50. DOI: 10.1007/BF02309393.
9. *Abanin, A. V., Ishimura, R. and Le Hai Khoi.* Exponential-Polynomial Bases for Null Spaces of Convolution Operators in $A^{-\infty}$, *Contemporary Mathematics*, 2011. vol. 547, pp. 1–16.
10. *Brawn, R. W., Meise, R. and Taylor, B. A.* Ultradifferentiable Functions and Fourier Analysis, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 17, pp. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.
11. *Abanin, A. V. and Abanina, D. A.* Division Theorem in Some Weighted Spaces of Entire Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 3–20 (in Russian). DOI: 517.547.2+517.982.
12. *Abanina, D. A.* Solvability of Convolution Equations in the Beurling Spaces of Ultradifferentiable Functions of Mean Type on an Interval, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 377–392. DOI: 10.1134/S0037446612020206.
13. *Zharinov, V. V.* Compact Families of Locally Convex Topological Vector Spaces, Frechet–Schwartz and Dual Frechet–Schwartz Spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 105–143. DOI: 10.1070/RM1979v034n04ABEH002963.
14. *Edwards, R. D. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, and London, Holt Rinehart and Winston, 1965.
15. *Robertson, A. P. and Robertson, W. Topological Vector Spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics, CUP Archive, 1980.
16. *Grothendieck, A.* Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasiliensis Mathematicae*, 1954, vol. 3, pp. 57–123.
17. *Meise R. and Vogt D. Introduction to Functional Analysis*, Oxford Grand. Text. Math., vol. 2, Oxford Univ. Press, New York, 1997.

Received June 10, 2024

Daria A. Polyakova
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher;

Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia
Associate Professor
E-mail: `forsites1@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-0202-2102