Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 2, С. 122–132

УДК 517.926.4
DOI 10.46698/x2543-2938-8548-c

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Х. Сташ[1]

[1] Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: `aidamir.stash@gmail.com`

Аннотация. Тематика исследования данной работы находится на стыке теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. В работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. В первой части настоящей работы построен пример линейного однородного дифференциального уравнения порядка выше второго, спектры верхних сильных показателей колеблемости строгих знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль. При этом все перечисленные показатели колеблемости на множестве решений построенного уравнения являются абсолютными. При построении указанного уравнения использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, авторская методика управления фундаментальной системой решений таких уравнений в одном частном случае. Во второй части работы доказано, что на множестве решений уравнений порядка выше второго сильные показатели колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней не обладают свойством остаточности. В качестве следствия выводится существование функции из указанного множества, обладающей следующими свойствами: все перечисленные показатели колеблемости являются точными, но не абсолютными. При этом все сильные показатели, как и все слабые, равны между собой.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, частота Сергеева, показатель колеблемости, остаточный функционал, спектр показателя колеблемости.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05.

Образец цитирования: *Сташ А. Х.* О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 122–132. DOI: 10.46698/x2543-2938-8548-c.

1. Обзор литературы и формулировка основных результатов

В работах И. Н. Сергеева [1–4] вводились и исследовались на полупрямой различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В статье [4] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [5–9] характеристические частоты [1] стали называться частотами Сергеева.

В настоящей работе будем рассматривать следующие разновидности показателей колеблемости *строгих знаков*, *нестрогих знаков*, *нулей*, *корней* или *гиперкорней*:

– *верхние* или *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения называемые *точными*);

– *сильные* или *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения называемые *абсолютными*).

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или строгих знаков, или нестрогих знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения y линейного уравнения n-го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\tilde{\mathscr{E}}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Из множества $\tilde{\mathscr{E}}^n$ выделим подмножество $\mathscr{E}^n$ уравнений с *ограниченными* на положительной полуоси коэффициентами. Через $\mathscr{C}^n$ обозначим подмножество множества $\mathscr{E}^n$, состоящее из уравнений с *постоянными* коэффициентами. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathscr{E}}^n$ обозначим через $\mathscr{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathscr{S}^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathscr{E}}^n} \mathscr{S}_*(a), \quad \mathscr{S}^n_{\mathscr{E}} = \bigcup_{a \in \mathscr{E}^n} \mathscr{S}_*(a).$$

Определение 1 [2]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [3, 4]. Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathscr{S}^n$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число ее точек *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ — число ее точек *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их кратности) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ — число ее *гиперкорней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некратный корень берется ровно один раз, а любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $\psi^n y = (y,\, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\alpha(y,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle\psi^n y, m\rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 [1, 2, 6]. *Верхние (нижние) частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathscr{S}^n$ зададим при $\alpha \in \{-,0,+\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\alpha}(y,t) \quad \left(\check{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\alpha}(y,t)\right).$$

Определение 4 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathscr{S}^n$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t) \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t) \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t)\right).$$

К определению 4 при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ добавим еще обозначения

$$\nu^{\alpha}(y,m,s,t) \equiv \nu^{\alpha}(y,m,t) - \nu^{\alpha}(y,m,s), \quad y \in \mathscr{S}^n,\ \ m \in \mathbb{R}^n_*,\ \ 0 \leqslant s < t.$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо показателя колеблемости $\hat{\varkappa}(x) = \check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa_{\circ}(x) = \varkappa_{\bullet}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является абсолютным.

Определение 5 [10, с. 489]. Множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством* прямой $\mathbb{R}$, если оно либо пусто, либо является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии, а множество $\mathscr{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ — суслинское множество *расширенной* числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty,+\infty\}$.

В работах [5, 7, 8] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Также в предположении, что спектры содержат точку нуль, получено обращение этого утверждения [7–9]. Последнее свойство удалось обобщить и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней.

Теорема 1. *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathscr{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ и любого $n > 2$ существует дифференциальное уравнение $a \in \tilde{\mathscr{E}}^n$, удовлетворяющее при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+\}$ равенствам*

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{-}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{0}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{+}(\mathscr{S}_*(a)) = \mathscr{A}. \qquad (1)$$

Важным свойством асимптотических характеристик функций из множества $\mathscr{S}^n$, призванным облегчить их исследование, является *остаточность* [11], т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени.

Определение 6 [11]. Для заданных множеств M и $F = \{f : \mathbb{R}_+ \to M\}$ назовем функцию $\lambda : F \to \mathbb{R}$ *остаточной*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы для одного $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $f(t) = g(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка сначала для характеристических частот строгих знаков и нулей было установлено И. Н. Сергеевым в [1]. Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [3], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Из результатов работ [12, 13] следует, что на множестве решений автономных систем все показатели колеблемости обладают свойством остаточности. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения попросту не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) характеристики колеблемости (частоты Сергеева и показатели колеблемости) равны между собой, так как нули его решений чередуются и в принципе не могут быть кратными [2]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости решений дифференциальных систем доказано в работах [14, 15], а у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней на множестве решений уравнений третьего порядка — в [16, 17]. Оказалось, что сильные показатели колеблемости на множестве решений уравнений фиксированного порядка выше второго не обладают свойством остаточности, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. *При любом $n > 2$ ни одна из функций*

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^{0}, \check{\nu}_{\bullet}^{0}, \hat{\nu}_{\bullet}^{+}, \check{\nu}_{\bullet}^{+}, \hat{\nu}_{\bullet}^{*}, \check{\nu}_{\bullet}^{*} : \mathscr{S}_{\mathscr{E}}^{n} \to \overline{\mathbb{R}}_{+} \tag{2}$$

не является остаточной.

Следствие 1. *При любом $n > 2$ существует вектор-функция $y \in \mathscr{S}_{\mathscr{E}}^{n}$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\nu_{\circ}^{\sim}(y) = \nu_{\circ}^{0}(y) = \nu_{\circ}^{+}(y) = \nu_{\circ}^{*}(y) < \nu_{\bullet}^{\sim}(y) = \nu_{\bullet}^{0}(y) = \nu_{\bullet}^{+}(y) = \nu_{\bullet}^{*}(y). \tag{3}$$

2. Вспомогательные факты

Из задачи 57 [18, с. 126] следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Если набор функций $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $a \in \tilde{\mathscr{E}}^n$, то при любом $\lambda > 0$ набор функций*

$$z_i(t) = y_i(t)\exp(\exp(\lambda t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

также является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $b \in \tilde{\mathscr{E}}^n$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2 [9]. *Для заданных функций $x_1, \ldots, x_n \in C^n(\mathbb{R}_+)$, вронскиан $W_{x_1,\ldots,x_n}(t)$ которых отличен от нуля в каждой точке неотрицательной полуоси $\mathbb{R}_+$, существует такая положительная функция $x \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, что*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_i(t)}{x(t)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ \ W_{x_1,\ldots,x_n,x}(t) \neq 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Для множества $\mathscr{G}$ квадратных матриц порядка n с положительными определителями положим $\mathscr{B}_r(H_0) = \{H \in \mathscr{G} : \|H - H_0\| \leqslant r\}$ (нормы в пространствах строк, столбцов и матриц определим как максимум модулей их элементов).

При управлении фундаментальной системой решений будем использовать следующую лемму.

Лемма 3 [19]. *Для каждой пары уравнений $a, b \in \mathscr{E}^n$, произвольных $0 < t_0 < t_1$ и пары фундаментальных систем решений $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{S}(a)$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{S}(b)$ с образованной ими парой фундаментальных матриц $X(t_0), Y(t_1) \in \mathscr{G}$ найдется уравнение $c \in \mathscr{E}^n$ с фундаментальной системой решений $z_1, \ldots, z_n \in \mathscr{S}(c)$, удовлетворяющей условиям*

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ y_i(t), & t \geqslant t_1, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

а если, кроме того, фиксирована пара матриц $H_0, H_1 \in \mathscr{G}$, то существует такое $\delta > 0$, что указанное уравнение можно выбрать еще и для каждой пары матриц $X(t_0) \in \mathscr{B}_\delta(H_0)$, $Y(t_1) \in \mathscr{B}_\delta(H_1)$ бесконечно дифференцируемым по ним (как по параметрам).

Из результатов работы [6] следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Для любой функции $f \in C^1[a, b]$, имеющей только простые нули $a < x_1 < \ldots < x_k < b$ или вовсе не имеющей нулей (тогда считаем $k = 0$), существует такое $\delta > 0$, что для всякой функции $g \in C^1[a, b]$, удовлетворяющей условию*

$$\max_{t \in [a,b]} \big(|g(t)| + |g'(t)|\big) < \delta,$$

функция $f + g$ имеет ровно k нулей, причем все они простые.

3. Доказательство основных результатов

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное суслинское множество $\mathscr{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащее нуль. Справедливость теоремы 1 при $n = 3$ установлена в работе [20], а именно, в ней доказано существование уравнения $a \in \tilde{\mathscr{E}}^3$ с фундаментальной системой решений $\{\exp(\exp(\lambda t)), y_{\mathscr{A}}(t) \exp(\exp(\lambda t)), u_0(t) \exp(\exp(\lambda t))\}$, удовлетворяющей условию (1).

Теперь установим справедливость теоремы 1 при любом $n > 3$. Для этого к фундаментальной системе решений $\{1, y_{\mathscr{A}}(t), u_0(t)\}$ некоторого уравнения $\tilde{a} \in \tilde{\mathscr{E}}^3$ (см. [7, 9, 20]), на основании леммы 2, добавим набор $u_1, u_2, \ldots, u_{n-3} \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ так, чтобы полученная система функций $\{1, y_{\mathscr{A}}(t), u_0(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{n-3}(t)\}$ была фундаментальной системой решений для некоторого уравнения из множества $\tilde{\mathscr{E}}^n$ и выполнялись условия

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u_{i-1}(t)}{u_i(t)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-3. \tag{5}$$

Согласно лемме 1 выберем уравнение $\overline{a} \in \tilde{\mathscr{E}}^n$ с фундаментальной системой решений $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathscr{S}_*(\overline{a})$, где

$$z_1(t) = \exp(\exp(\lambda t)), \quad z_2(t) = \exp(\exp(\lambda t)) y_{\mathscr{A}}(t),$$

$$z_i(t) = \exp(\exp(\lambda t)) u_{i-3}(t), \quad i = 3, \ldots, n.$$

Если $c_4 = c_5 = \cdots = c_n = 0$, то для произвольного решения

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n \in \mathscr{S}_*(\overline{a})$$

повторяются рассуждения доказательства теоремы [20]. В противном случае, из условия (5) при достаточно больших $t > 0$ решение z отделено от нуля. Следовательно, все характеристики колеблемости строгих знаков, нулей и корней решения z равны нулю. Поэтому из принадлежности $0 \in \mathscr{A}$ следует справедливость заключения теоремы. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. **1.** Сначала зафиксируем нечетный порядок уравнения $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим такое уравнение $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathscr{C}^n$, для которого характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda+1)(\lambda^2+1)^k = 0$, т. е. имеет простой корень $\lambda = -1$ и k-кратные корни $\lambda = \pm i$. Ясно, что его упорядоченные фундаментальные системы решений

$$x_1 = e^{-t}, \quad x_2 = \cos t, \quad x_3 = \sin t, \ldots, x_{n-1} = t^{k-1}\cos t, \quad x_n = t^{k-1}\sin t,$$
$$y_1 = -\cos t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \sin t, \ldots, y_{n-1} = t^{k-1}\cos t, \quad y_n = t^{k-1}\sin t$$

имеют один и тот же определитель Вронского.

Выберем такие числа t_1 и t_2, что $t_1 < t_2$. В соответствии с леммой 3 построим на участке $[t_1, t_2]$ уравнение $b \in \mathscr{E}^n$ (с гладкими коэффициентами), переводящее набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решений, заданных на отрезке $[0, t_1]$, в набор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ решений, заданных на луче $[t_2, +\infty)$: вне отрезка $[t_1, t_2]$ уравнение b совпадает с уравнением a. Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, и т. д. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответственно, т. е.

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [0, t_1], \\ y_i(t), & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Теперь рассмотрим уравнение $d \equiv (0, d_2, 0, d_4, \ldots, 0, d_{n-1}) \in \mathscr{C}^{n-1}$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2+1)^k = 0$. Тогда для вектора $m_1 = (d_{n-1}, 0, d_{n-3}, \ldots, d_2, 0, 1)$ и произвольного решения $x = c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \in \mathscr{S}_*(a)$ выполняется $\langle \psi^n x(t), m_1 \rangle \equiv 0$, так как $x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathscr{S}_*(d)$.

2. Рассмотрим два решения

$$y = y_2 + y_3 + \cdots + y_n \in \mathscr{S}_*(a), \quad z = z_2 + z_3 + \cdots + z_n \in \mathscr{S}_*(b),$$

совпадающие друг с другом на луче $[t_2, +\infty)$. Для вектора m_1 имеем представление

$$\langle \psi^n y(t), m_1 \rangle = Ae^{-t} > 0, \quad A = 1 + d_2 + \cdots + d_{n-3} + d_{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$\langle \psi^n z(t), m_1 \rangle = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ \langle \psi^n y(t), m_1 \rangle, & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Отсюда в силу неравенства (6) имеем

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(y) = 0, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}. \tag{7}$$

3. Из доказательства теоремы 3 из [21] следует, что для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ найдется такой вектор $m^j \in \mathbb{R}^n_*$, неколлинеарный m_1, что справедливо представление

$$t^{-j+1}\langle \psi^n z(t), m^j \rangle = q_1 \cos t + q_2 \sin t + \varphi_j(t), \quad t \geqslant t_2,$$

где $q_1 q_2 \neq 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi_j(t) = \lim_{t\to+\infty} \varphi_j'(t) = 0$. При этом для некоторых векторов m, согласно [3, теорема 2], выполнено неравенство $\nu^*(z, m, t_2) < +\infty$. Следовательно, на основании леммы 4 при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ справедливо

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\, \nu^\alpha(z, m, t) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{t}{\pi}\right] = 1,$$

где $[s]$ — целая часть числа s.

Для нижних сильных показателей колеблемости решения z имеют место аналогичные равенства, поэтому справедлива цепочка равенств

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = 1, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}. \tag{8}$$

Несовпадение друг с другом величин (7) и (8) означает неостаточность рассматриваемых показателей (2).

4. Для уравнений фиксированного четного порядка $n = 2k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, проводятся аналогичные рассуждения. В самом деле, для выбранных чисел τ_1 и τ_2 в соответствии с леммой 3 построим уравнение $\overline{b} \in \mathscr{E}^n$ с фундаментальной системой решений $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$:

$$\overline{z}_i(t) = \begin{cases} \overline{x}_i(t), & t \in [0, \tau_1], \\ \overline{y}_i(t), & t \in [\tau_2, +\infty), \end{cases}$$

где системы функций

$$\overline{x}_1 = e^{-t}\cos t, \quad \overline{x}_2 = e^{-t}\sin t, \quad \overline{x}_3 = \cos 2t, \quad \overline{x}_4 = \sin 2t, \ldots, \overline{x}_n = t^{k-1}\sin 2t,$$

$$\overline{y}_1 = e^{-t}\cos t, \quad \overline{y}_2 = -\cos 2t, \quad \overline{y}_3 = e^{-t}\sin t, \quad \overline{y}_4 = \sin 2t, \ldots, \overline{y}_n = t^{k-1}\sin 2t$$

(с одним и тем же определителем Вронского) являются фундаментальными для уравнения $\overline{a} \in \mathscr{C}^n$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)^k = 0$.

В дальнейшем нам понадобится еще уравнение $\overline{d} \equiv (0, \overline{d}_2, 0, \overline{d}_4, \ldots, 0, \overline{d}_{n-2}) \in \mathscr{C}^{n-2}$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2 + 4)^k = 0$ и соответственно фундаментальной системой решений $\overline{x}_3, \overline{x}_4, \ldots, \overline{x}_n \in \mathscr{S}_*(\overline{d})$.

Для двух решений

$$\overline{y} = \overline{y}_3 + \overline{y}_4 + \cdots + \overline{y}_n \in \mathscr{S}_*(\overline{a}), \quad \overline{z} = \overline{z}_3 + \overline{z}_4 + \cdots + \overline{z}_n \in \mathscr{S}_*(\overline{b}),$$

совпадающих на луче $[\tau_2, +\infty)$, и вектора $\overline{m}_1 = (\overline{d}_{n-2}, 0, \overline{d}_{n-4}, \ldots, \overline{d}_2, 0, 1, 0)$ справедливы представления

$$\langle \psi^n \overline{z}(t), \overline{m}_1 \rangle \equiv 0, \quad t \in [0, \tau_1],$$

$$\langle \psi^n \overline{y}(t), \overline{m}_1 \rangle = Be^{-t}\sin(t + t_0), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где t_0 — вспомогательный угол, а $B \neq 0$, поскольку $\overline{y}_3 \notin \mathscr{S}_*(\overline{d})$.

Очевидно, что при любом $m \in \mathbb{R}_*^n$ имеет место включение $\langle \psi^n \overline{y}(t), \overline{m} \rangle \in \mathscr{S}_*(\overline{a})$. Из доказательства теоремы IV работы [1] вытекает, что для любого уравнения с постоянными коэффициентами характеристическая частота строгих знаков у любого ненулевого его решения не меньше, чем наименьший из модулей мнимых частей корней его характеристического многочлена. Поэтому при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ для решения $\overline{y}$ имеем

$$1 \leqslant \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\overline{y}) \leqslant \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\overline{y}) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\, \nu^{\alpha}(\overline{y}, m, t) \leqslant \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\, \nu^{\alpha}(\overline{y}, \overline{m}_1, t) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{t + t_0}{\pi} \right] = 1,$$

а для решения $\overline{z}$ и любого вектора $m \nparallel \overline{m}_1$ при $t \geqslant \tau_2$ имеем представление

$$\langle \psi^n \overline{z}(t), m \rangle = r_1 e^{-t}\cos t + r_2 e^{-t}\sin t + \cdots + r_{n-1}t^{k-1}\cos 2t + r_n t^{k-1}\sin 2t,$$

в котором все коэффициенты $r_3, r_4, \ldots, r_n$ одновременно не равны нулю. Из доказательства теоремы 3 [21] следует, что для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ найдется такой вектор $\overline{m}^j \nparallel \overline{m}_1$, что функция $\langle \psi^n \overline{z}(t), \overline{m}^j \rangle$ удовлетворяет условию

$$t^{-j+1}\big\langle \psi^n \overline{z}(t), \overline{m}^j \big\rangle = \overline{r}_1 \cos 2t + \overline{r}_2 \sin 2t + \psi_j(t), \quad t \geqslant \tau_2,$$

где $\overline{r}_1 \overline{r}_2 \neq 0$, $\lim_{t \to +\infty} \psi_j(t) = \lim_{t \to +\infty} \psi_j'(t) = 0$.

Следовательно, на основании теоремы 2 из [3] и леммы 4 найдется такой вектор $m_2 \nparallel \overline{m}_1$, что справедливо

$$\nu_{\bullet}^{\alpha}(\overline{z}) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\alpha}(\overline{z},m,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\alpha}(\overline{z},m_2,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\left[\frac{2t}{\pi}\right] = 2.$$

Таким образом, полученные неравенства

$$\nu_{\bullet}^{\alpha}(\overline{y}) = 1 < 2 = \nu_{\bullet}^{\alpha}(\overline{z}), \quad \alpha \in \{\sim,0,+,*\}$$

завершают доказательство теоремы 2. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство следствия 1. Обратимся к доказательству теоремы 2.

1. В случае нечетности порядка уравнений при любом $\alpha \in \{\sim,0,+,*\}$ выполнено равенство $\nu^{\alpha}(z,m_1,t_1) = +\infty$. Для любого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ при $t \geqslant t_2$ имеем представление

$$\langle \psi^n z(t), m\rangle = A_1 e^{-t} + A_2\cos t + A_3 \sin t + \dots + A_{n-1}t^{k-1}\cos t + A_n t^{k-1}\sin t.$$

Из условия $m \to m_1$ следует $A_1 \to A \neq 0$, $A_2 \to 0,\dots,A_n \to 0$, а значит, при любом $t > t_2$ справедливо равенство

$$\lim_{m\to m_1} \nu^{\alpha}(z,m,t_2,t) = 0, \quad \alpha \in \{\sim,0,+,*\},$$

откуда с учетом оценки (см. [3, теорема 2])

$$\lim_{m\to m_1} \nu^{*}(z,m,t_2) < +\infty,$$

получим

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(z) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^{\alpha}(z,m,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \lim_{m\to m_1} \nu^{\alpha}(z,m,t) = 0, \quad \alpha \in \{\sim,0,+,*\}. \tag{9}$$

Несовпадение друг с другом величин (8) и (9) гарантирует справедливость неравенства (3).

2. В случае четных порядков уравнений при любом $\alpha \in \{\sim,0,+,*\}$ выполнено равенство $\nu^{\alpha}(\overline{z},\overline{m}_1,\tau_1) = +\infty$. Для любого ненулевого вектора $m \nparallel \overline{m}_1$ при $t \geqslant \tau_2$ имеем представление

$$\langle \psi^n \overline{z}(t), m\rangle = B_0 e^{-t}\sin(t+t_1) + B_1\sin(2t+t_2) + \dots + B_k t^{k-1}\sin(2t+t_{k+1}),$$

где $t_1, t_2, \dots, t_{k+1}$ — вспомогательные аргументы.

Если $m \to \overline{m}_1$, то $B_0 \to B \neq 0$, $B_1 \to 0,\dots,B_k \to 0$ и при любом $t \geqslant \tau_2$ верно

$$\lim_{m\to\overline{m}_1} \nu^{\alpha}(\overline{z},m,\tau_2,t) = \left[\frac{t-\tau_2}{\pi}\right], \quad \alpha \in \{\sim,0,+,*\}.$$

Следовательно, при любом $\alpha \in \{\sim,0,+,*\}$ получаем цепочку равенств

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(\overline{z}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^{\alpha}(\overline{z},m,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \lim_{m\to\overline{m}_1} \nu^{\alpha}(\overline{z},m,t) = 1,$$

а значит, $\nu_{\circ}^{\alpha}(\overline{z})$ меньше чем $\nu_{\bullet}^{\alpha}(\overline{z})$. $\rhd$

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов статьи.

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—2006.—Вып. 25.—С. 249–294.
2. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем.—2012.—Т. 76, № 1.—С. 149–172. DOI: 10.4213/im5035.

3. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб.—2013.—Т. 204, № 1.—С. 119–138. DOI: 10.4213/sm7928.
4. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки.—2016.—Т. 99, № 5.—С. 732–751. DOI:10.4213/mzm10555.
5. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 4.—С. 419–425. DOI: 10.1134/S0374064116040026.
6. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 10.—С. 1302–1320. DOI: 10.1134/S0374064116100034.
7. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 12.—С. 1595–1609. DOI: 10.1134/S0374064116120013.
8. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси.—2016.—Т. 60, № 1.—С. 24–31.
9. *Войделевич А. С.* О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Матем. Информатика.—2019.—№ 1.—С. 28–32. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-28-32.
10. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.—М.: Мир, 1966.—594 с.
11. *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—1983.—Вып. 9.—С. 111–166.
12. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—2014.—Вып. 30.—С. 75–93.
13. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2019.—Т. 29, вып. 4.—С. 558–568. DOI: 10.20537/vm190407.
14. *Сташ А. Х.* Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика.—2019.—№ 5.—С. 48–51.
15. *Сташ А. Х.* Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2021.—Т. 31, вып. 1.—С. 59–69. DOI: 10.35634/vm210105.
16. *Сташ А. Х.* Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика.—2017.—№ 2.—С. 65–68.
17. *Сташ А. Х., Лобода Н. А.* К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Матем. Мех. Информ.—2023.—Т. 23, вып. 3.—С. 348–356. DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356.
18. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2.—М., 1978.—432 с.
19. *Сергеев И. Н.* Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика.—2009.—№ 3.—С. 25–33.
20. *Сташ А. Х.* Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения.—2023.—Т. 59, № 5.—С. 588–595. DOI: 10.31857/S0374064123050035.
21. *Сташ А. Х.* Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 10.—С. 1418–1422. DOI: 10.1134/S0374064114100203.

Статья поступила 9 декабря 2023 г.

Сташ Айдамир Хазретович
Адыгейский государственный университет,
декан факультета математики и компьютерных наук
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: `aidamir.stash@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0003-3008-7859

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 2, P. 122–132

ON SOME PROPERTIES OF STRONG OSCILLATION EXPONENTS OF SOLUTIONS OF LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

Stash, A. Kh.[1]

[1] Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia

E-mail: `aidamir.stash@gmail.com`

Abstract. The research topic of this work is at the junction of the theory of Lyapunov exponents and of the theory of oscillation. We study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) of strict signs, non-strict signs, zeros, roots and hyperroots of non-zero solutions of linear homogeneous differential equations higher than third order with continuous and bounded coefficients on the positive semi-axis. In the first part of this paper, an example of a linear homogeneous differential equation of order higher than the second is constructed, the spectra of the upper strong oscillation exponents of strict signs, zeros and roots of which coincide with a given Suslin set of a non-negative semi-axis of an extended numerical line containing zero. At the same time, all the listed exponents of oscillation on the set of solutions of the constructed equation are absolute. When constructing the indicated equation, analytical methods of the qualitative theory of differential equations, in particular, the author's technique for controlling the fundamental system of solutions of such equations in one particular case. In the second part of the paper it is proved that on the set of solutions of equations of order higher than the second, strong oscillation exponents of non-strict signs, zeros, roots and hyperroots are not residual. As a consequence, the existence of a function from the specified set with the following properties is proved: all the listed exponents of oscillation are accurate, but not absolute. At the same time, all strong exponents, as well as all weak ones, are equal to each other.

Keywords: differential equations, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies, residual functional, the spectrum of the oscillation exponent.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05.

For citation: *Stash, A. Kh.* On Some Properties of Strong Oscillation Exponents of Solutions of Linear Homogeneous Differential Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 122–132 (in Russian). DOI: 10.46698/x2543-2938-8548-c.

References

1. *Sergeev, I. N.* Definition and Properties of Characteristic Frequencies of a Linear Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. DOI: 10.1007/s10958-006-0142-6.
2. *Sergeev, I. N.* Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of a Linear Differential Systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. DOI: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002578.
3. *Sergeev, I. N.* The Remarkable Agreement Between the Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of Differential Systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. DOI: 10.1070/SM2013v204n01ABEH004293.
4. *Sergeev, I. N.* Oscillation, Rotation, and Wandering Exponents of Solutions of Differential Systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. DOI: 10.1134/S0001434616050114.
5. *Bykov, V. V.* On the Baire Classification of Sergeev Frequencies of Zeros and Roots of Solution of Linear Differential Equation, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. DOI: 10.1134/S0012266116040029.
6. *Barabanov, E. A. and Voidelevich, A. S.* Remark on the Theory of Sergeev Frequencies of Zeros, Signs and Roots for Solution of Linear Differential Equation: I, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. DOI: 10.1134/S0012266116100013.
7. *Barabanov, E. A. and Voidelevich, A. S.* Remark on the Theory of Sergeev Frequencies of Zeros, Signs and Roots for Solution of Linear Differential Equation: II, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. DOI: 10.1134/S0012266116120016.

8. *Barabanov, E. A. and Voidelevich, A. S.* Spectra of the Upper Sergeev Frequencies of Zeros and Signs of Linear Differential Equation, *Doklady Nacional'noj akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian).
9. *Voidelevich, A. S.* On Spectra of Upper Sergeev Frequencies of Linear Differential Equation, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
10. *Kuratovsky, K. Topology*, vol. 1, New York, London/Warszawa, Academic Press/Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.
11. *Sergeev, I. N.* A Contribution to the Theory of Lyapunov Exponents for Linear Systems of Differential Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 1986, vol. 33, no. 6, pp. 1245–1292. DOI: 10.1007/BF01084752.
12. *Burlakov, D. S. and Tsoii, S. V.* Coincidence of Complete and Vector Frequencies of Solutions of a Linear Autonomous System, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. DOI: 10.1007/s10958-015-2554-7.
13. *Stash, A. Kh.* Properties of Exponents of Oscillation of Linear Autonomous Differential System Solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 558–568 (in Russian).
14. *Stash, A. Kh.* Some Properties of Oscillation Indicators of Solutions to a Two-Dimensional System, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 5, pp. 202–204. DOI: 10.3103/S0027132219050061.
15. *Stash, A. Kh.* The Absence of Residual Property for Strong Exponents of Oscillation of Linear Systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, no. 1, pp. 59–69 (in Russian). DOI: 10.35634/vm210105.
16. *Stash, A. Kh.* The Absence of Residual Property for Total Hyper-Frequencies of Solutions to Third Order Differential Equations, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2017, vol. 72, pp. 81–83. DOI: 10.3103/S0027132217020085.
17. *Stash, A. Kh. and Loboda, N. A.* On the Question of Residual of Strongs Exponents of Oscillation on the Set of Solutions of Third-Order Differential Equations, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 3, pp. 348–356 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356.
18. *Polya, G. and Szego, G. Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis*, vol. 2, Hardcover, 1945.
19. *Sergeev, I. N.* Controlling Solutions to a Linear Differential Equation, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, pp. 113–120. DOI: 10.3103/S0027132209030048.
20. *Stash, A. Kh.* On the Control of the Spectra of Upper Strong Oscillation Exponents of Signs, Zeros, and Roots of Third-Order Differential Equations, *Differential Equation*, 2023, vol. 59. no. 5, pp. 597–605. DOI: 10.1134/S0012266123050038.
21. *Stash, A. Kh.* Properties of Complete and Vector Sign Frequencies of Solutions of Linear Autonomous Differential Equations, *Differential Equation*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1413–1417. DOI: 10.1134/S0012266114100206.

Received December 9, 2023

Aydamir Kh. Stash
Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science
E-mail: aidamir.stash@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3008-7859