Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 68–79

УДК 517.955.8
DOI 10.46698/a2304-7639-9051-d

УСРЕДНЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ СЛАГАЕМЫМИ[#]

В. Б. Левенштам[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8

E-mail: `vlevenshtam@yandex.ru`

Работа посвящается 70-летию Александра Аванесовича Ватульяна

Аннотация. Одним из мощных асимптотических методов теории дифференциальных уравнений является метод усреднения, который связывают с именами известных исследователей Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Этот метод глубоко разработан не только для обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, но и для многих классов уравнений в частных производных. Однако для гиперболических систем дифференциальных уравнений метод усреднения изучен еще недостаточно. Для полулинейных гиперболических систем он обоснован в работах Ю. А. Митропольского, Г. П. Хомы и некоторых других авторов. Кроме того, ранее рядом авторов был предложен и обоснован алгоритм построения полных асимптотик решений таких систем; решение усредненной задачи является при этом главным членом асимптотики. В данной работе исследуется задача Коши в многомерном пространственно-временном слое для гиперболической системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими по времени слагаемыми. Среди такого рода слагаемых правой части могут быть большие — пропорциональные корню квадратному из высокой частоты осцилляций, причем большие слагаемые имеют по быстрой переменной (произведение частоты и времени) нулевое среднее. Спецификой рассматриваемой системы является то обстоятельство, что слагаемые ее уравнений не зависят явно от пространственных переменных. Для указанной задачи Коши построена предельная (усредненная) при стремлении частоты осцилляций к бесконечности задача и обоснован предельный переход (метод усреднения). Последнее означает доказательство однозначной разрешимости исходной (возмущенной) задачи и обоснование равномерной во всем слое асимптотической близости решений исходной (возмущенной) и усредненной задач.

Ключевые слова: многомерная гиперболическая система квазилинейных уравнений, большие быстро осциллирующие по времени слагаемые, задача Коши, обоснование метода усреднения.

AMS Subject Classification: 35F35, 35L02, 35L40, 34C29.

Образец цитирования: *Левенштам В. Б.* Усреднение высокочастотной гиперболической системы квазилинейных уравнений с большими слагаемыми // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 68–79. DOI: 10.46698/a2304-7639-9051-d.

Введение

Одним из мощных асимптотических методов теории дифференциальных уравнений является метод усреднения [1], который связывают с именами известных исследователей Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Этот метод глубоко разработан не только для обык-

[#]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 20-11-20141, https://rscf.ru/project/23-11-45003/.

новенных дифференциальных и интегральных уравнений, но и для многих классов уравнений в частных производных и других [2–7]. Однако для гиперболических систем дифференциальных уравнений метод усреднения изучен еще недостаточно. Для полулинейных гиперболических систем он обоснован в работах [8–11]. При этом в работах [10, 11] предложен и обоснован алгоритм построения полных асимптотик решений таких систем (решение усредненной задачи является главным членом асимптотики).

В данной работе рассматривается задача Коши в многомерном пространственно-временном слое для гиперболической системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими по времени слагаемыми. Среди такого рода слагаемых правой части могут быть большие — пропорциональные корню квадратному из высокой частоты осцилляций, причем, большие слагаемые имеют по быстрой переменной (произведение частоты и времени) нулевое среднее. Спецификой задачи является то обстоятельство, что слагаемые уравнений не зависят явно от пространственных переменных. Для указанной задачи построена предельная (усредненная) задача при стремлении частоты осцилляций к бесконечности и обоснован предельный переход (метод усреднения). Последнее означает доказательство однозначной разрешимости исходной (возмущенной) задачи и обоснование равномерной во всем слое асимптотической близости решений исходной и усредненной задач. В отдельной работе мы планируем изложить с обоснованием алгоритм построения полных асимптотик решений гиперболических систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими по времени слагаемыми в случае задачи Коши при условии бесконечной гладкости их данных.

1°. Зафиксируем три числа: n, $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$, и два множества: $\Pi = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \in [0;T]\big\}$ и $\Omega = \big\{(u,t,\tau) \in \mathbb{R}^{m+2} : u \in \mathbb{R}^m,\ t \in [0;T],\ \tau \in [0;\infty)\big\}$.

В многомерном слое Π рассмотрим задачу Коши для гиперболической системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от большого параметра ω (частота осцилляций):

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u,t,\omega t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = b_i(u,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\, c_i(u,t,\omega t),\\ u_i(x,0) = g_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,m.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь вектор-функции $a^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1,2,\ldots,m$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ — известные, а $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — неизвестная. Все рассматриваемые в работе функции предполагаются вещественными, а решения рассматриваемых задач понимаются в классическом смысле.

Задачу (1) можно записать в векторной форме путем введения диагональных матриц

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{2j} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда (1) допускает представление:

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} A_j(u,t,\omega t)\tfrac{\partial u}{\partial x_j} = b(u,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\, c(u,t,\omega t), \quad u(x,0) = g(x).$$

Этой векторной формой записи задачи (1) мы далее пользоваться не будем.

Для векторов $v \in \mathbb{R}^k$ и квадратных матриц $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, порядка k, $k \in \mathbb{N}$, зададим согласованные нормы. Пусть, для определенности, далее

$$|v| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |v_i|, \quad \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|.$$

Относительно данных задачи (1) предположим следующее.

1. Вектор-функции $a^{(i)}(u,t,\tau)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $b(u,t,\tau)$, $c(u,t,\tau)$, производная последней $\frac{\partial c(u,t,\tau)}{\partial u}$ и $g(x)$ определены на множествах Ω и $\mathbb{R}^n$ соответственно, непрерывны и равномерно ограничены некоторой константой $M > 0$: $|a^{(i)}|$, $|b|$, $|c|$, $\left\|\frac{\partial c}{\partial u}\right\|$, $|g| \leqslant M$. Кроме того, существуют непрерывные производные $\frac{\partial a^{(i)}}{\partial u}$, $i = 1,\ 2,\ldots,\ m$, $\frac{\partial b}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial u \partial t}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$, причем эти производные на множестве $\Omega_0 = \{(u,t,\tau) \in \Omega : |u| \leqslant 2\pi M^2 T + M(T+1) + 1\}$ равномерно ограничены, а $\frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$, кроме того, равномерно непрерывна по (u,t). Предположим еще, что вектор-функция $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируема и ее производная $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, равномерно ограничена.

2. Вектор-функция $c(u,t,\tau)$ 2π-периодична по τ с нулевым средним:

$$\big\langle c(u,t,\tau)\big\rangle_\tau \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(u,t,s)\,ds = 0.$$

Существуют определенные на множестве $\Phi_0 = \{(u,t) :\ |u| \leqslant 2\pi M^2 T + M(T+1) + 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ вектор-функции

$$A^{(i)}(u,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N a^{(i)}(u,t,s)\,ds \equiv \big\langle a^{(i)}(u,t,\tau)\big\rangle_\tau, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

$$B(u,t) = \big\langle b(u,t,\tau)\big\rangle_\tau,$$

причем эти равенства остаются справедливыми при их формальном дифференцировании по u. Например,

$$A^{(i)}_u(u,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N a^{(i)}_u(u,t,s)\,ds.$$

Пусть указанные предельные равенства справедливы равномерно относительно $(u,t) \in \Phi_0$.

3. Для любых векторов $\overset{i}{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,m$, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dv}{dt} = P(v,t), \quad v_i(0) = g_i(\overset{i}{x}_0), \tag{2}$$

где

$$P(v,t) = \left\langle b(u,t,\tau) + \frac{\partial c(u,t,\tau)}{\partial v} \int_0^\tau c(v,t,s)\,ds \right\rangle_\tau.$$

В силу наших предположений она однозначно разрешима на участке $t \in [0;T]$, и при этом ее решение $V(\bar{x}_0,t)$, где $\bar{x}_0 = (\overset{1}{x}_0, \overset{2}{x}_0, \ldots, \overset{m}{x}_0) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_{mn})$, $y_i \in \mathbb{R}^1$, вместе с производными по t, y_r, $r = 1,2,\ldots,mn$, непрерывны при $(\bar{x}_0,t) \in \hat{\Pi} \equiv \mathbb{R}^{mn} \times [0;T]$.

Рассмотрим теперь задачу

$$\frac{d\overset{i}{y}}{dt} = A^{(i)}\left(V(\bar{x}_0,t),t\right), \quad t\in[0;T],$$
$$\overset{i}{y}(0) = \overset{i}{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Предположим, что при некотором $\sigma > 0$ и всех $t \in [0;T]$ справедливо неравенство:

$$\left|\det\left[\int\limits_0^t \sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial A^{(i)}\left[V(\bar{x}_0,s),s\right]}{\partial V_p}\frac{\partial V_p(\bar{x}_0,s)}{\partial y_r}\right)_{i,r=1}^{m,mn} ds + E\right]\right| > \sigma.$$

Здесь нижними индексами p и r обозначены номера координат указанных векторов, причем номера строк, стоящих под знаком суммы, связаны со значением числа i, а столбцов — со значением r.

2°. Наряду с задачей (1) рассмотрим в слое Π усредненную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = P_i(v,t),\\ v_i(x,0) = g_i(x), \quad i=1,2,\ldots,m.\end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 1. *Задача* (1) *при больших* ω *и задача* (3) *имеют единственные решения* $u_\omega(x,t)$ *и* $v(x,t)$, *соответственно, и при этом справедлива асимптотическая формула*

$$\lim_{\omega\to\infty}\|u_\omega(x,t) - v(x,t)\|_{C(\Pi)} = 0.$$

При доказательстве теоремы 1 будем использовать классический метод характеристик. В связи с этим рассмотрим следующую задачу Коши для нормальной системы ОДУ:

$$\begin{gathered}\tfrac{du}{dt} = b(u,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\,c(u,t,\omega t), \quad t\in[0;T],\\ u_i(0) = g_i(\overset{i}{x}_0), \quad \overset{i}{x}_0\in\mathbb{R}^n,\ i=1,2,\ldots,m.\end{gathered} \tag{4}$$

Произведя в нее замену переменных

$$u(t) = w(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}h(w,t,\omega t), \tag{5}$$

где $h(w,t,\tau) = \int_0^\tau c(w,t,s)\,ds$, придем к задаче

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} = {} & \left[b(w,t,\omega t) + \frac{\partial c(w,t,\omega t)}{\partial w}\,h(w,t,\omega t)\right] + \left[\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1} - E\right]\\ & \times\left[b(w,t,\omega t) + \frac{\partial c(w,t,\omega t)}{\partial w}\,h(w,t,\omega t)\right] + \left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h(w,t,\omega t)}{\partial w}\right)^{-1}\\ & \times\left\{\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left[\int\limits_0^1 \frac{\partial b\left(w + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\theta h, t, \omega t\right)}{\partial w}\,d\theta h - \left.\frac{\partial h(w,s,\omega t)}{\partial s}\right|_{s=t}\right]\right.\\ & \left. + \int\limits_0^1\left[\frac{\partial c\left(w + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\theta h, t, \omega t\right)}{\partial w} - \frac{\partial c(w,t,\omega t)}{\partial w}\right] d\theta h\right\}\\ & \equiv p(w,t,\omega t) + \alpha_1(w,t,\omega) + \alpha_2(w,t,\omega),\end{aligned} \tag{6}$$

$$w_i(0) = g_i(\overset{i}{x}_0), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь символами p, α_1, α_2 обозначены слагаемые правой части уравнения (6).

Лемма 1. *Равномерно относительно (w,t): $w \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0;T]$, выполняются предельные равенства*

$$\lim_{\omega\to\infty} \big|\alpha_i(w,t,\omega)\big| = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial w}\big[\alpha_i(w,t,\omega)\big] \right\| = 0, \quad i = 1, 2.$$

◁ Доказательство леммы 1 легко следует из условий п. 1. При этом учитываются простые равенства

$$\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1} - E = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_0}\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1}\frac{\partial^2 h}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_0}\left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{-1}. \ \triangleright$$

Решения задач (4), (2) и (6) обозначим символами $U_\omega(\bar{x}_0,t)$, $V(\bar{x}_0,t)$ и $W_\omega(\bar{x}_0,t)$ соответственно. Нетрудно видеть, учитывая лемму 1, что вектор-функции $V(\bar{x}_0,t)$ и $W_\omega(\bar{x}_0,t)$ при больших ω, а потому, в силу (5), и вектор-функция $U_\omega(\bar{x}_0,t)$, при $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{nm}$ определены на участке $t \in [0;T]$ и имеют там непрерывные производные по $\bar{x}_0$ и t, которые равномерно ограничены.

Лемма 2. *Справедливы предельные равенства*

$$\lim_{\omega\to\infty} \big\|U_\omega(\bar{x}_0,t) - V(\bar{x}_0,t)\big\|_{C(\hat{\Pi})} = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_0}\big[U_\omega(\bar{x}_0,t) - V(\bar{x}_0,t)\big] \right\|_{C(\hat{\Pi})} = 0. \tag{8}$$

◁ Учитывая, что вектор-функции U_ω и W_ω связаны соотношением (5), нам достаточно доказать предельные равенства (7) и (8) с заменой U_ω на W_ω. Воспользуемся очевидными равенствами

$$W_{\omega i}(\bar{x}_0,t) = \int_0^t p_i\big[W_\omega(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\big]\,d\tau + \sum_{k=1}^{2}\int_0^t \alpha_{ki}\big[W_\omega(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\big]\,d\tau + g_i(\overset{i}{x}_0), \tag{9}$$

$$V_i(\bar{x}_0,t) = \int_0^t P_i\big[V(\bar{x}_0,\tau),\tau\big]\,d\tau + g_i(\overset{i}{x}_0), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Обозначив

$$W_\omega(\bar{x}_0,t) - V(\bar{x}_0,t) = \Gamma_\omega(\bar{x}_0,t), \tag{11}$$

придем к неравенству

$$\begin{gathered}\big|\Gamma_\omega(\bar{x}_0,t)\big| \leqslant L_0\int_0^t \big|\Gamma_\omega(\bar{x}_0,\tau)\big|\,d\tau + \left|\int_0^t \Big\{p\big[V(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\big] - P\big[V(\bar{x}_0,\tau)\big]\Big\}\,d\tau\right| \\ + \sum_{k=1}^{2}\left|\int_0^t \alpha_k\big[W_\omega(\bar{x}_0,\tau),\omega\big]\,d\tau\right| \equiv L_0\int_0^t \big|\Gamma_\omega(\bar{x}_0,\tau)\big|\,d\tau + \gamma(\bar{x}_0,\tau,\omega),\end{gathered} \tag{12}$$

где L_0 — не зависящая от $(\bar{x}_0, t) \in \hat{\Pi}$ константа. С помощью леммы 1 и стандартных приемов теории метода усреднения [1] (см. также [12]) доказывается предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \big\|\gamma(\bar{x}_0, \tau, \omega)\big\|_{C(\hat{\Pi})} = 0. \tag{13}$$

Из соотношений (12), (13) и леммы Беллмана — Гронуолла согласно (11) и (5) следует первое равенство леммы 2.

Перейдем к доказательству второго предельного равенства леммы 2. Продифференцируем вначале равенства (3) и (10) по y_{0s}, $s = 1, 2, \ldots, k$:

$$\frac{\partial W_\omega(\bar{x}_0, t)}{\partial y_{0s}} = \int\limits_0^t \frac{\partial p\big(W_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big)}{\partial w} \frac{\partial W_\omega(\bar{x}_0, \tau)}{\partial y_{0s}}\, d\tau$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \int\limits_0^t \frac{\partial \alpha_i\big(W_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\big)}{\partial w} \frac{\partial W_\omega}{\partial y_{0s}}\, d\tau + \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial y_{0s}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial V_\omega(\bar{x}_0, t)}{\partial y_{0s}} = \int\limits_0^t \frac{\partial P\big(V(\bar{x}_0, \tau), \tau\big)}{\partial w} \frac{\partial V}{\partial y_{0s}}\, d\tau + \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial y_{0s}} \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{15}$$

Введем обозначение

$$\rho_s(\bar{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial y_{0s}}\big[W_\omega(\bar{x}_0, t) - V(\bar{x}_0, t)\big]$$

и вычтем из равенства (14) равенство (15). Придем к неравенству

$$\rho_s(\bar{x}_0, t) \leqslant \int\limits_0^t \left\|\frac{\partial p\big[W_\omega(\bar{x}_0, \tau, \omega\tau)\big]}{\partial w}\right\| \rho_s(\bar{x}_0, t)\, d\tau$$
$$+ \left|\int\limits_0^t \left\{\frac{\partial p\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big]}{\partial w} - \frac{\partial P\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau\big]}{\partial w}\right\} \frac{\partial V(\bar{x}_0, \tau)}{\partial y_{0s}}\, d\tau\right|$$
$$+ \left|\int\limits_0^t \left\{\frac{\partial p\big[W_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big]}{\partial w} - \frac{\partial p\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big]}{\partial w}\right\} \frac{\partial V(\bar{x}_0, \tau)}{\partial \bar{y}_{0s}}\, d\tau\right| \tag{16}$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \int\limits_0^t \left\{\frac{\partial \alpha_k\big[W_\omega(\bar{x}_0, \tau, \omega)\big]}{\partial w} \frac{\partial W_\omega}{\partial y_{0s}}\right\} d\tau \leqslant L_1 \int\limits_0^t \rho_s(\bar{x}_0, \tau)\, d\tau$$
$$+ \left|\int\limits_0^t \left\{\frac{\partial p\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big]}{\partial w} - \frac{\partial P\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau\big]}{\partial w}\right\} d\tau\right| + L_2 \sigma\big(\Gamma(\bar{x}_0, \tau), \omega^{-1}\big).$$

Здесь L_1, $L_2 = \mathrm{const} > 0$, а $\sigma(d, \varepsilon)$, d, $\varepsilon \geqslant 0$, — непрерывная в нуле функция, такая что $\sigma(0, 0) = 0$. Для предпоследнего слагаемого равенства (16) с помощью стандартных соображений метода усреднения устанавливается соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \left\|\int\limits_0^t \left\{\frac{\partial p\big[V(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\big]}{\partial w} - \frac{\partial P\big[V(\bar{x}_0, \tau, \tau\big]}{\partial w}\right\} \frac{\partial V(\bar{x}_0, t)}{\partial y_{0s}}\, d\tau\right\|_{C(\hat{\Pi})} = 0. \tag{17}$$

Последнее же слагаемое в (16) легко оценивается с помощью первого предельного равенства леммы 2. Из (16) с учетом отмеченных фактов следует неравенство

$$\rho(\bar{x}_0, t) \leqslant L_1 \int_0^t \rho(\bar{x}_0, \tau)\, d\tau + \alpha(\omega), \quad \omega > 0, \tag{18}$$

где

$$\lim_{\omega\to\infty} \alpha(\omega) = 0. \tag{19}$$

Из (18), (19) и леммы Беллмана — Гронуолла вытекает второе соотношение леммы 2 с заменой U_ω на W_ω, а потому (в силу (5)) и непосредственно второе соотношение леммы 2. $\triangleright$

Перейдем к изложению еще одного вспомогательного утверждения. В связи с этим для любого набора векторов $\overset{i}{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, на временном отрезке $t \in [0; T]$ при больших ω рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ, состоящей из nm уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d\overset{i}{x}}{dt} = a^{(i)}\bigl[U_\omega(\bar{x}_0, t), t, \omega t\bigr], \quad \bar{x}_0 = \bigl(\overset{1}{x}_0, \overset{2}{x}_0, \ldots, \overset{m}{x}_0\bigr), \\ \overset{i}{x}(0) = \overset{i}{x}_0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{20}$$

Ее решение обозначим $\bar{x}(t, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} \overset{1}{x}(t, \bar{x}_0) \\ \overset{2}{x}(t, \bar{x}_0) \\ \cdots \\ \overset{m}{x}(t, \bar{x}_0) \end{pmatrix}$. Для каждого $t \in [0; T]$ зададим отображение $X_\omega^t : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$, $X_\omega^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t, \bar{x}_0)$.

Лемма 3. *Существуют такие положительные числа ω_0 и σ_0, что при $\omega > \omega_0$ отображение X_ω^t, $t \in [0; T]$, является диффеоморфизмом и при этом справедливы неравенства*

$$\left|\det\left[\int_0^t \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial a^{(i)}\bigl[U_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\bigr]}{\partial v_p} \frac{\partial U_{\omega p}(\bar{x}_0, \tau)}{\partial s_r}\right)_{i,r=1}^{m,mn} d\tau + E\right]\right| > \sigma_0, \tag{21}$$

где $\bar{x}_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_{mn})$.

$\triangleleft$ Имеем

$$X_\omega^t(\bar{x}_0) = \int_0^t a\bigl[U_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\bigr]\, d\tau + \bar{x}_0, \quad \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{mn}, \ \ t \in [0; T].$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial X_\omega^t(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} = \int_0^t \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial a^{(i)}\bigl[U_\omega(\bar{x}_0, \tau), \tau, \omega\tau\bigr]}{\partial v_p} \frac{\partial U_{\omega p}(\bar{x}_0, \tau)}{\partial s_r}\right)_{i,r=1}^{m,mn} d\tau + E. \tag{22}$$

Оценка (21) вытекает из условия 3 п. 1° и леммы 2 с использованием стандартных приемов метода усреднения [1] (см. также [12]). Утверждение же о том, что $X_\omega^t : \mathbb{R}^{mn} \to$

$\mathbb{R}^{mn}$ — диффеоморфизм, вытекает из равенства (22), неравенства (21) и глобальной теоремы об обратной функции Ж. Адамара (см. [13, 14]). $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Наряду с задачей (20), решения которой являются проекциями характеристик системы (1) на пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{mn+1}$, рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \frac{d\overset{i}{y}}{dt} = A^{(i)}\big(V(\bar{y},t),t\big), \\ \overset{i}{y}(0) = \overset{i}{y}_0, \quad \overset{i}{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1,2,\dots,m, \end{gathered} \tag{23}$$

которая описывает проекции характеристик усредненной системы (3) на пространство $\mathbb{R}^{mn+1}$.

Выпишем эквивалентные (20) и (23) системы интегральных уравнений:

$$\bar{x}(t) = \int\limits_0^t a\big(U_\omega(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\big)\,d\tau + \bar{x}_0 = \varphi_\omega(\bar{x}_0,t), \tag{24}$$

$$\bar{y}(t) = \int\limits_0^t A\big(V(\bar{y}_0,\tau),\tau\big)\,d\tau + \bar{y}_0 = \varphi_\infty(\bar{y}_0,t), \tag{25}$$

где $\bar{x} = (\overset{1}{x},\overset{2}{x},\dots,\overset{m}{x})$, $\bar{y} = (\overset{1}{y},\overset{2}{y},\dots,\overset{m}{y})$.

На банаховом пространстве $\mathbb{R}^{mn} \times [0;T]$ определим два отображения: $\Phi_\omega : (\bar{x}_0,t) \to (\bar{x},t)$, $\Phi_\infty : (\bar{y}_0,t) \to (\bar{y},t)$, где $\bar{x} = \varphi_\omega(\bar{x}_0,t)$, $\bar{y} = \varphi(\bar{y}_0,t)$. Нам понадобится одно обобщение [13] глобальной теоремы об обратной функции Ж. Адамара [14] (см. также [15]).

Приведем это обобщение, следуя [16].

Пусть X и Y — банаховы пространства и $F : X \to Y$ — непрерывно дифференцируемое отображение, производная которого в каждой точке $x \in X$ является обратимым линейным оператором. Если существует число $c > 0$ такое, что

$$\left\| \frac{\partial F(x)}{\partial x}^{-1} \right\| \leqslant c \quad (\forall\, x \in X),$$

то F является диффеоморфизмом, а обратное отображение F^{-1} удовлетворяет условию Липшица с константой c.

Из этого результата, формул (24), (25), очевидного представления $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial(\bar{x}_0,t)}$, $\alpha = \omega,\infty$, и леммы 3 следует, что отображения Φ_ω и Φ_∞ являются диффеоморфизмами. Следовательно [17], вектор-функции

$$u_\omega(x,t) = U_\omega\big[\Phi_\omega^{-1}(x,t)\big], \tag{26}$$

$$v(x,t) = V\big[\Phi_\infty^{-1}(x,t)\big] \tag{27}$$

являются единственными решениями задач (1) и (3) соответственно.

Из представлений (26), (27) и леммы 2 следует, что для завершения доказательства теоремы достаточно установить справедливость равномерного относительно $(x,t) \in \Pi$ предельного равенства

$$\lim_{\omega\to\infty} \big|\Phi_\omega^{-1}(x,t) - \Phi_\infty^{-1}(x,t)\big| = 0. \tag{28}$$

Из представлений (24), (25), в которых $x(t) = y(t) = x \in \mathbb{R}^n$, следует соотношение

$$\int\limits_0^t \Bigl(A\bigl[V(\bar{y}_0,\tau),\tau\bigr] - A\bigl[V(\bar{x}_0,\tau),\tau\bigr]\Bigr)\,d\tau + \bar{y}_0 - \bar{x}_0$$

$$= \int\limits_0^t \Bigl(a\bigl[U_\omega(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\bigr] - a\bigl[V(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\bigr]\Bigr)\,d\tau$$

$$- \int\limits_0^t \Bigl(A\bigl[V(\bar{x}_0,\tau),\tau\bigr] - a\bigl[V(\bar{x}_0,\tau),\tau,\omega\tau\bigr]\Bigr)\,d\tau \equiv C_\omega(\bar{x}_0,t), \qquad (29)$$

где

$$\bar{x}_0 = \varphi_\omega^{-1}(x,t), \quad \bar{y}_0 = \varphi_\infty^{-1}(x,t). \qquad (30)$$

Равенство (29) перепишем в виде

$$\Biggl[\int\limits_0^1 d\theta \int\limits_0^t A_v\Bigl\{V\bigl[\bar{x}_0 + \theta(\bar{y}_0 - \bar{x}_0),\tau\bigr],\tau\Bigr\}$$

$$\times V_{\bar{x}_0}\bigl[x_0 + \theta(\bar{y}_0 - \bar{x}_0),\tau\bigr]\,d\tau + E\Biggr](\bar{y}_0 - \bar{x}_0) = C_\omega(\bar{x}_0,t). \quad (31)$$

Из условий п. 1 и леммы 2 вытекает предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \bigl\|C_\omega(\bar{x}_0,t)\bigr\|_{C(\hat{\Pi})} = 0. \qquad (32)$$

Соотношение (28) следует теперь из формул (31), (32) и леммы 3. ▷

Литература

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории линейный колебаний.—М.: Наука, 1974.—408 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Лекции по методу усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка, 1966.—469 с.
3. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории параболических уравнений с приложениями к задачам гидродинамической устойчивости.—Ростов-н/Д.: РГУ, 1983.
4. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. матем.—2006.—Т. 70, № 2.—С. 25–26. DOI: 10.4213/im555.
5. *Левенштам В. Б.* Старшие приближения метода усреднения для параболических начально-краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами // Дифференц. уравнения.—2003.—Т. 39, № 10.—С. 1395–1403.
6. *Ivleva N., Levenshtam V.* Asymptotic analysis of the generalized convection problem // Eurasian Math. J.—2015.—Vol. 6, № 1.—P. 41–55.
7. *Левенштам В. Б.* О взаимосвязи двух классов решений уравнений Навье — Стокса // Владикавк. матем. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 56–66.
8. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О принципе усреднения для гиперболических уравнений вдоль характеристик // Укр. матем. журнал.—1970.—Т. 22, № 5.—С. 600–610.
9. *Хома Г. П.* Теорема об усреднении для гиперболических систем первого порядка // Укр. матем. журнал.—1970.—Т. 22, № 5.—С. 699–704.
10. *Капикян А. К., Левенштам В. Б.* Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Журн. вычисл. мат. и мат. физики.—2008.—Т. 48, № 11.—С. 2024–2041.

11. *Назаров А. К.* Асимптотический анализ эволюционных высокочастотных задач: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук.—Ростов-н/Д, 2017.
12. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми.—Ростов-н/Д: Изд. ЮФУ, 2010.
13. *Rheinboldt W.* Local mapping relations and global implicit function theorems. // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 138.—P. 183–198. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0240644-0.
14. *Hadamard J.* Sur les transformations ponctuelles // Bull. Soc. Math. France.—1906.—Vol. 34.—P. 71–84.
15. *Ортега Дж., Рейнбол В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.—М.: Мир, 1975.—558 с.
16. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Глобальная и полулокальная теорема о неявной и об обратной функциях в банаховом пространстве // Матем. сб.—2022.—Т. 213, № 1.—С. 3–45. DOI: 10.4213/sm9483.
17. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Гостиздат, 1952.—295 с.

Статья поступила 5 сентября 2023 г.

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2438-5307

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 68–79

AVERAGING OF A HIGH-FREQUENCY HYPERBOLIC SYSTEM OF QUASI-LINEAR EQUATIONS WITH LARGE TERMS

Levenshtam, V. B.[1,2]

[1] Southern Federal University, 8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Steklov Mathematical Institute of RAS, 8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

Abstract. One of the powerful asymptotic methods of the theory of differential equations is the well-known averaging method, which is associated with the names of famous researchers N. M. Krylov and N. N. Bogolyubov. This method is deeply developed not only for ordinary differential and integral equations, but also for many classes of partial differential equations. However, for hyperbolic systems of differential equations, the averaging method has not been sufficiently studied. For semilinear hyperbolic systems, it is justified in the works of Yu. A. Mitropolsky, G. P. Khoma and some other authors. In addition, a number of authors have previously proposed and justified an algorithm for constructing complete asymptotics of solutions of such systems; the solution of the averaged problem is the main member of the asymptotics. In this paper, we study the Cauchy problem in a multidimensional space-time layer for a hyperbolic system of first-order quasi-linear differential equations with rapidly time-oscillating terms. Among such terms of the right part there may be large — proportional to the square root of the high frequency of oscillations, and the large terms have a zero mean for the fast variable (the product of frequency and time). The specificity of the problem is the fact that the terms of the equations do not explicitly depend on spatial variables. For this problem, a limit (averaged) problem is constructed with the oscillation frequency tending to infinity and a limit transition (averaging method) is justified. The latter means proving the unambiguous solvability of the original (perturbed) problem and substantiating the asymptotic proximity of solutions of the original (perturbed) and averaged problems uniform throughout the layer.

Keywords: multidimensional hyperbolic system of quasi-linear equations, large terms rapidly oscillating in time, Cauchy problem, justification of the averaging method.

AMS Subject Classification: 35F35, 35L02, 35L40, 34C29.

For citation: *Levenshtam, V. B.* Averaging of a High-Frequency Hyperbolic System of Quasi-Linear Equations with Large Terms, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 68–79 (in Russian). DOI: 10.46698/a2304-7639-9051-d.

References

1. *Bogolyubov, N. N. and Mitropolsky, Yu. A. Asymptotic Methods in the Theory of Linear Oscillations*, Delhi, Hindustan Publishing Corp.; New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1961, 537 p.
2. *Mitropolsky, Yu. A. Lekcii po metodu usrednenija v nelinejnoj mehanike* [Lectures on the Averaging Method in Nonlinear Mechanics], Kyiv, Naukova dumka, 1966 (in Russian).
3. *Simonenko, I. B. Metod usrednenija v teorii parabolicheskih uravnenij s prilozhenijami k zadacham gidrodinamicheskoj ustojchivosti* [Averaging Method in the Theory of Nonlinear Parabolic Equations with Applications to Hydrodynamic Stability Theory], Rostov-on-Don, Rostov. Gos. Univ., 1983 (in Russian).
4. *Levenstam, V. B.* Substantiation of the Averaging Method for Parabolic Equations Containing Rapidly Oscillating Terms with Large Amplitudes, *Izvestiya: Mathematics*, 2006, vol. 70, no. 2, pp. 233–263. DOI: 10.1070/IM2006v070n02ABEH002311.
5. *Levenstam, V. B.* Higher-Order Approximations of the Averaging Method for Parabolic Initial-Boundary Value Problems with Rapidly Oscillating Coefficients, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 1471–1479. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000017919.43170.97.
6. *Ivleva, N. and Levenshtam, V. B.* Asymptotic Analysis of the Generalized Convection Problem, *Eurasian Mathematical Journal*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
7. *Levenstam, V. B.* On the Relationship of Two Classes of Solutions to the Navier–Stokes Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 56–66 (in Russian).
8. *Mitropolsky, Yu. A. and Homa, G. P.* On the Averaging Principle for Hyperbolic Equations Along Characteristics, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1970, vol. 22, no. 5, pp. 513–522. DOI: 10.1007/BF01086519.
9. *Khoma, G. P.* A Theorem on Averaging for Hyperbolic Systems of First Order, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1970, vol. 22, no. 5, pp. 605–610 DOI: 10.1007/BF01086535.
10. *Kapikyan, A. K. and Levenshtam, V. B.* First-order Partial Differential Equations with Large High-Frequency Terms, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 11, pp. 2059–2076. DOI: 10.1134/S0965542508110110.
11. *Nazarov, A. K. Asimptoticheskij analiz jevoljucionnyh vysokochastotnyh zadach* [Asymptotic Analysis of Evolutionary High-Frequency Problems], Dis. ... Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Rostov-on-Don, 2017 (in Russian).
12. *Levenstam, V. B. Differencial'nye uravnenija s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi* [Differential Equations with Large High-Frequency Terms], Rostov-on-Don, SFU Publ. House, 2010 (in Russian).
13. *Rheinboldt, W.* Local Mapping Relations and Global Implicit Function Theorems, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1969, vol. 138, pp. 183–198. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0240644-0.
14. *Hadamard, J.* Sur les Transformations Ponctuelles, *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 1906, vol. 34, pp. 71–84.
15. *Ortega, J. and Rheinboldt, W. Iteracionnye metody reshenija nelinejnyh sistem uravnenij so mnogimi neizvestnymi* [Iterative Methods for Solving Nonlinear Systems of Equations with Many Unknowns], Moscow, Mir, 1975, 558 p.
16. *Arutyunov, A. V. and Zhukovsky, S. E.* Global and Semilocal Theorem on Implicit and Inverse Functions in Banach Space, *Sbornik: Mathematics*, 2022, vol. 213, no. 1, pp. 1–41. DOI: 10.1070/SM9483.
17. *Petrovsky, I. G.* Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations, *Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij*, Moscow, Gosizdat, 1952, 295 p.

Received September 5, 2023

Valeriy B. Levenshtam
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Discrete Mathematics;
Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,
Leading Researcher
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2438-5307