

УДК 541.124+517.9

DOI 10.46698/n3062-4932-2162-c

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЛИСТОВ<sup>#</sup>

Л. И. Кононенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

E-mail: [larak@math.nsc.ru](mailto:larak@math.nsc.ru)

**Аннотация.** Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, описывающая задачу химической кинетики. Данная система исследуется с помощью метода интегральных многообразий, который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность системы. Интегральное многообразие состоит из листов и при малом параметре  $\varepsilon = 0$  является медленной поверхностью. Для системы сформулированы прямая и обратная задачи. Прямая задача заключается в следующем: по известным правым частям системы найти решение системы или доказать его существование. Обратная задача состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи. Сначала мы рассматриваем вырожденный случай, когда  $\varepsilon = 0$ , при этом имеем некоторые ограничения на размерность медленных и быстрых переменных, на задание правых частей в виде многочленов (здесь степень многочлена равна 1), на количество листов медленной поверхности. Затем переходим к невырожденному случаю  $\varepsilon \neq 0$ . В случае одного листа медленной поверхности ранее была доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи для этого случая. В данной работе рассмотрена система с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов. Доказана теорема существования и единственности решения такой системы. Доказательство опирается на результат, полученный ранее для системы с медленной поверхностью, состоящей из одного листа.

**Ключевые слова:** обратная задача, обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярно возмущенные системы, листы медленной поверхности, малый параметр, химическая кинетика.

**AMS Subject Classification:** 34E15.

**Образец цитирования:** Кононенко Л. И. Обратная задача для сингулярно возмущенной системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 81–88. DOI: 10.46698/n3062-4932-2162-c.

### 1. Введение

Настоящая работа основана на исследованиях, опубликованных в статье [1]. Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon),$$

$x \in \mathbb{R}^m$  — медленные,  $y \in \mathbb{R}^n$  — быстрые переменные,  $f, g$  — достаточно гладкие функции,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon$  — положительный малый параметр. Система рассматривается в ограниченной выпуклой инвариантной притягивающей области.

---

<sup>#</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0005.

© 2023 Кононенко Л. И.

Для данной системы поставлена обратная задача: по известному решению системы при некоторых условиях надо восстановить правые части системы. Для исследования обратной задачи в [1] были введены некоторые ограничения. Данная работа является обобщением результатов, полученных в [1]; это обобщение связано с ограничением на число листов медленной поверхности.

Работа состоит из краткого обзора уже имеющихся результатов, изложенных в соответствующих статьях, и нового результата о существовании и единственности решения системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов.

## 2. Прямая задача и метод интегральных многообразий

Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $X := \mathbb{R}^m$ ,  $Y$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $T := \mathbb{R}$ ,  $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ . Положим  $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ ,  $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$ ,  $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$ .

Рассмотрим задачу  $P$  с областью данных  $\text{Dom } P = F \times G \times E$ , областью искомого  $\text{Im } P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$  и условием

$$P((f, g, \varepsilon), (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \end{cases} \quad \text{для всех } t \in T,$$

где  $f \in F$ ,  $g \in G$ ,  $\varepsilon \in E$ ,  $x \in C^1(T, X)$ ,  $y \in C^1(T, Y)$  [2, 3].

Задача  $P$  является прямой задачей: по известным правым частям системы находим решение  $x(t), y(t)$  системы или доказываем его существование и единственность.

Такая задача  $P$  исследуется методом интегральных многообразий [4–8], который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность рассматриваемых систем.

В задаче  $P$  система распадается на «медленную» и «быструю» подсистемы:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon) \quad \text{и} \quad \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon). \quad (1)$$

Напомним необходимые сведения о методе интегральных многообразий для системы (1).

Гладкая поверхность  $S$  в  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  называется *интегральным многообразием* системы (1), если любая траектория этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с  $S$ , целиком принадлежит поверхности  $S$ . Формально, если при  $t = t_0$  точка  $(x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$ , то траектория  $(x(t), y(t), t)$  целиком принадлежит  $S$ .

Если в системе (1) положить  $\varepsilon = 0$ , получим *порождающую* или *вырожденную* систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \quad (2)$$

$$0 = g(x, y, t, 0). \quad (3)$$

Уравнение  $g(x, y, t, 0) = 0$  задает *медленную поверхность*. Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задает *лист медленной поверхности*.

*Листы интегрального многообразия медленных движений* (или медленного интегрального многообразия) являются уточнением при учете малого параметра  $\varepsilon$  листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням  $\varepsilon$ :

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \dots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \dots, \quad (4)$$

где коэффициенты разложения  $h_k(x, t)$  подсчитываются по рекуррентной формуле, приведенной, например, в [6]:

$$h_k = -B^{-1} \left[ g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)} \right], \quad B = \det \left( \frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0) \right) \neq 0. \quad (5)$$

Среди интегральных многообразий системы (1) нас интересуют  $m$ -мерные интегральные многообразия (размерность медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции  $y = h(x, t, \varepsilon)$ .

Выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t),$$

где  $h_0(x, t)$  — функция, график которой является листом медленной поверхности.

Нахождение решения системы (1) сводится к отысканию решения вырожденной системы (2)–(3), получаемой из исходной, если параметр  $\varepsilon$  формально положить равным нулю. Этот факт следует из работ А. Н. Тихонова (например, [9]), в которых доказаны теоремы о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Правые части системы (1) являются достаточно гладкими функциями, поэтому удовлетворяют требуемым условиям, в частности, обеспечивают единственность решения.

### 3. Существование интегрального многообразия медленных движений

В [6] было доказано существование интегрального многообразия для системы (1). Приведем соответствующую теорему.

Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:

I. Уравнение  $g(x, y, t, 0) = 0$  имеет изолированное решение  $y = h_0(x, t)$  при  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ .

II. В области  $\Omega_0 = \{(x, y, t, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}^m, \|y - h_0(x, t)\| < \rho, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$  функции  $f$ ,  $g$  и  $h_0$  равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до  $(k+2)$ -го порядка включительно ( $k \geq 0$ ).

III. Собственные значения  $\lambda_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)$  подчиняются неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \leq -2\gamma < 0$ .

Требуется по заданным функциям  $f(x, y, t, \varepsilon)$ ,  $g(x, y, t, \varepsilon)$  в правой части системы (1) найти  $x(t)$ ,  $y(t)$  в некоторой области  $\Omega_0$  или доказать существование решения  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

**Теорема 1** (Гольдштейн — Соболев). Пусть выполняются условия I–III. Тогда существует такое  $\varepsilon_1$  ( $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ), что для каждого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  система (1) имеет интегральное многообразие медленных движений  $y = h(x, t, \varepsilon)$ , представленное формулой (4) с коэффициентами (5), движение по которому описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Если  $x(t)$  — решение этого уравнения, то пара  $x(t)$ ,  $y(t)$ , где  $y(t) = h(x, t, \varepsilon)$ , является решением исходной системы (1), т. е. пара  $x(t)$ ,  $y(t)$  есть решение прямой задачи.

В качестве примеров прямой задачи в [7, 8] были рассмотрены две модели из химической кинетики: математическая модель реактора идеального смешения и математическая модель каталитической реакции окисления СО на иридии.

#### 4. Обратная задача (вырожденный случай)

Приведем постановку обратной задачи для системы (1) (вырожденный случай). Для упрощения исследования обратной задачи введены следующие ограничения:

1) рассматривается обратная задача для системы (1) при  $\varepsilon = 0$ , т. е. для вырожденной системы (2)–(3); тесная связь с вырожденной системой мотивирует рассмотрение случая  $\varepsilon = 0$ ;

2) функция  $f$  в правой части медленной подсистемы системы (1) задается в виде многочлена  $p$ -й степени  $f = \sum_{i+j \leq p} b_{ij} x^i y^j$ , так как в задачах химической кинетики правые части системы часто являются полиномами, более того, будем рассматривать многочлен первой степени;

3) рассматриваются системы с одной медленной и одной быстрой переменными, т. е.  $m = n = 1$ ; при этом область изменения переменных

$$W = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, x + y \leq 1\}; \quad (6)$$

4) функцию  $g(x, y, t, \varepsilon)$  считаем заданной и удовлетворяющей всем условиям теоремы о неявной функции в каждой точке области, в частности,  $\frac{\partial g(x, y, t, 0)}{\partial y} \neq 0$ , следовательно, при  $\varepsilon = 0$  медленная поверхность, уравнение которой  $g(x, y, t, 0) = 0$ , задана;

5) медленная поверхность состоит из  $n$  листов.

Заметим, что ограничения 1)–4) совпадают с ограничениями, принятыми в [1], и лишь в 5) мы снимаем ограничение на количество листов медленной поверхности. Итак, медленная поверхность задается уравнением  $g(x, y, t, \varepsilon) = 0$ , предполагаем, что оно имеет  $n$  решений, каждое из которых задает лист медленной поверхности  $y = h_i(x(t), t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Задача, обратная к  $P$ , состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи  $P$ . Обратные задачи для различных систем дифференциальных уравнений рассматривались, например, в [10–16].

Будем рассматривать обратную задачу для системы (1) на каждом из заданных листов  $y = h_i(x(t), t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $h_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Для каждого  $i$  рассмотрим задачу  $Q_i$  с областью данных  $\text{Dom } Q_i = \mathbb{R}^3$ , областью искомого  $\text{Im } Q_i = C^1(\mathbb{R})^2$  и условием

$$Q_i(p, (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = p_1^i + p_2^i x(t) + p_3^i y(t), \\ y(t) = h_i(x(t), t), \end{cases}$$

где  $p = (p_1^i, p_2^i, p_3^i) \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

В роли данных используются конечные наборы значений функций или их производных, а не всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи  $Q_i^{-1}$  и вспомогательной задачи  $R_i$  с областью данных  $\text{Dom } R_i = (\mathbb{R}^3)^3$ , областью искомого  $\text{Im } R_i = C^1(\mathbb{R})^2$  и условием

$$R_i((t, \alpha^i, \beta^i), (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1^i, & x(t_2) = \alpha_2^i, & x(t_3) = \alpha_3^i, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1^i, & \dot{x}(t_2) = \beta_2^i, & \dot{x}(t_3) = \beta_3^i, \end{cases}$$

где  $t, \alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}^3$ ,  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ .

В области  $W$  из (6) имеем следующие ограничения на начальные данные:

$$\begin{aligned} 0 \leq m_\alpha \leq \alpha_j^i \leq \mu_\alpha \leq 1, \\ 0 \leq m_\beta \leq \beta_j^i \leq \mu_\beta, \\ 0 \leq m_\alpha \leq h_j^i \leq \mu_h \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

По сравнению с формальной обратной задачей  $Q_i^{-1}$  композиция  $Q_i^{-1} \circ R_i$  более практична и представляет собой следующую задачу: по данным  $t, \alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}^3$  найти коэффициенты  $p_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , для которых существуют функции  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ , удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha_1^i, \quad x(t_2) = \alpha_2^i, \quad x(t_3) = \alpha_3^i, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1^i, \quad \dot{x}(t_2) = \beta_2^i, \quad \dot{x}(t_3) = \beta_3^i, \\ \dot{x}(t) = p_1^i + p_2^i x(t) + p_3^i y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = h_i(x(t), t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

В [17] был получен результат об однозначной разрешимости обратной задачи для системы (1) с медленной поверхностью, состоящей из одного листа. Аналогичную теорему мы сформулируем для каждого листа  $y = h_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 2.** Если  $t, \alpha^i \in \mathbb{R}^3$  удовлетворяют условию

$$\Delta^i := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^i & h_i(\alpha_1^i, t_1) \\ 1 & \alpha_2^i & h_i(\alpha_2^i, t_2) \\ 1 & \alpha_3^i & h_i(\alpha_3^i, t_3) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то при любых  $\beta^i \in \mathbb{R}^3$  задача  $Q_i^{-1} \circ R_i$  однозначно разрешима для данных  $(t, \alpha^i, \beta^i)$  и ее решение  $(p_1^i, p_2^i, p_3^i) = (Q_i^{-1} \circ R_i)^s(t, \alpha^i, \beta^i)$  вычисляется по формулам

$$p_j^i = \Delta_j / \Delta^i, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где  $\Delta_j$  — определитель матрицы, полученной из приведенной выше матрицы заменой  $j$ -го столбца столбцом  $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \beta_3^i)$ .

В [18] был доказан критерий, который позволяет выяснить, в каких случаях существует набор чисел  $t_k$ , удовлетворяющий условию теоремы 2.

## 5. Существование и единственность решения обратной задачи (невырожденный случай)

В [1] был предложен алгоритм, с помощью которого исследовалась обратная задача для системы (1) с медленной поверхностью, состоящей из одного листа, в невырожденном случае ( $\varepsilon \neq 0$ ) с теми же ограничениями на правую часть системы, которые были наложены в вырожденном случае ( $\varepsilon = 0$ ). Этот итерационный алгоритм состоит в комбинировании на каждом шаге итерации решения обратной задачи для исследованного случая  $\varepsilon = 0$  и решения прямой задачи, которое обеспечивается теоремой существования и единственности при  $\varepsilon \neq 0$  для каждого листа медленной поверхности.

В данной работе каждый лист медленной поверхности является тем самым одним листом медленной поверхности, для которого был приведен алгоритм в [1], доказана его сходимость, тем самым доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи на каждом листе  $y = h_i(x(t), t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Обозначим через  $L_i$  константу из принципа сжимающих отображений [19], которая является, по сути, скоростью сходимости алгоритма на  $i$ -ом листе медленной поверхности системы (1). В качестве  $L = \max\{L_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , мы рассмотрим максимальную скорость сходимости алгоритма на листе, и, учитывая все ограничения (7), аналогичные ограничениям в [1], имеем теорему существования и единственности для сингулярно возмущенной системы с медленной поверхностью, состоящей из нескольких листов.

**Теорема 3.** Пусть в области  $W$ , описанной формулой (6), выполняются условия 1)–5) из раздела 3; имеют место ограничения (7);  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$  в системе (1). Если  $t, \alpha^i \in \mathbb{R}^3$  удовлетворяют условию

$$\Delta^i = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^i & h_i(\alpha_1^i, t) \\ 1 & \alpha_2^i & h_i(\alpha_2^i, t) \\ 1 & \alpha_3^i & h_i(\alpha_3^i, t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то при любых  $\beta^i \in \mathbb{R}^3$  обратная задача для системы (1) ( $\varepsilon \neq 0$ ) имеет единственное решение при  $L < 1$ , где константа  $L = \max L_i$ .

**Благодарность.** Автор выражает благодарность коллегам за помощь в работе и критические замечания, которые были учтены.

## Литература

1. Кононенко Л. И. Задача идентификации для невырожденной системы дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными // *Мат. заметки СВФУ*.—2021.—Т. 28, № 2.—С. 3–15. DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001.
2. Гутман А. Е., Кононенко Л. И. Формализация обратных задач и ее приложения // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*—2017.—Т. 17, № 4.—С. 49–56. DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
3. Гутман А. Е., Кононенко Л. И. Обратная задача химической кинетики как композиция бинарных соответствий // *Сиб. электрон. мат. изв.*—2018.—Т. 15.—С. 48–53. DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
4. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике.—М.: Наука, 1963.—512 с.
5. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.—М.: Изд-во МГУ, 1978.—106 с.
6. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем.—Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.
7. Кононенко Л. И. О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущенных систем // *Сиб. журн. индустр. матем.*—2002.—Т. 5, № 2.—С. 109–125.
8. Кононенко Л. И. Медленные поверхности в задачах химической кинетики // *Мат. заметки ЯГУ*.—2012.—Т. 19, вып. 2.—С. 49–67.
9. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // *Матем. сб.*—1948.—Т. 22 (64), № 2.—С. 193–204.
10. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.—М: Наука, 1980.—286 с.
11. Романов В. Г. Обратные задачи для гиперболических систем // *Вычислительные методы в мат. физике, геофизике и оптимальном управлении*.—Новосибирск: Наука, 1978.—С. 128–142.
12. Романов В. Г., Слинючева Л. И. Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка // *Мат. проблемы геофизики*.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.—Вып. 3.—С. 187–215.
13. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Журнал вычисл. математики и мат. физики*.—2004.—Т. 44, № 4.—С. 694–716.
14. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.—458 с.
15. Аниконов Ю. Е. Несколько вопросов теории обратных задач для кинетических уравнений // *Обратные задачи мат. физики*.—Новосибирск, 1985.—С. 28–41.
16. Голубятников В. П. Обратная задача для уравнения Гамильтона — Якоби на замкнутом многообразии // *Сиб. матем. журн.*—1997.—Т. 38, № 2.—С. 276–279.

17. Кононенко Л. И. Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. мат. изв.—2016.—Т. 13.—С. 175–180. DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.
18. Gutman A. E., Kononenko L. I. Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 3.—С. 37–47 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17981.
19. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.—Ч. 1, кн. 2; 2000, Ч. 2, кн. 1.

*Статья поступила 5 ноября 2022 г.*

КОНОНЕНКО ЛАРИСА ИВАНОВНА  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
научный сотрудник  
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4  
E-mail: [larak@math.nsc.ru](mailto:larak@math.nsc.ru)

*Vladikavkaz Mathematical Journal  
2023, Volume 25, Issue 3, P. 81–88*

## THE INVERSE PROBLEM FOR SINGULAR PERTURBED SYSTEM WITH MANY-SHEETED SLOW SURFACES

Kononenko, L. I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,  
4 Ac. Koptuyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: [larak@math.nsc.ru](mailto:larak@math.nsc.ru)

**Abstract.** We consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations with small parameter, which describes a problem of chemical kinetics. We examine the system by using the method of integral manifolds that serves as a convenient tool for studying multidimensional singularly perturbed systems of differential equations and makes it possible to lower the dimension of the system. The integral manifold consists of sheets; for the small parameter  $\varepsilon = 0$ , it is a slow surface. We formulate the direct and inverse problems for the system. The direct problem is as follows: given the right-hand sides of the system, find a solution to the system or prove its existence. The inverse problem is to find the unknown right-hand sides of the system of differential equations from some data on a solution of the direct problem. First, we consider the degenerate case, in which the small parameter  $\varepsilon$  equals zero, and some restrictions are imposed on the dimension of the slow and fast variables, on the class of the right-hand sides that are assumed polynomial (with degree 1), and on the number of sheets of the slow surface. Then we pass to the nondegenerate case  $\varepsilon \neq 0$ . In the case of a single sheet of the slow surface, the existence and uniqueness theorem was previously proven for a solution of the inverse problem. In this paper, we consider a system whose slow surface consists of several sheets. We prove an existence and uniqueness theorem for a solution to such a system. The proof is based on the result previously obtained for a system whose slow surface consists of a single sheet.

**Keywords:** inverse problem, ordinary differential equation, small parameter, slow surface, contraction mapping principle, chemical kinetics.

**AMS Subject Classification:** 34E15.

**For citation:** Kononenko, L. I. The Inverse Problem for Singular Perturbed System with Many-Sheeted Slow Surfaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 81–88 (in Russian). DOI: 10.46698/n3062-4932-2162-c.

## References

1. Kononenko, L. I. The Identification Problem for a Nondegenerate System of Ordinary Differential Equations with Fast and Slow Variables, *Mathematical Notes of NEFU*, 2021, vol. 28, no. 2, pp. 3–15 (in Russian). DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001.
2. Gutman, A. E. and Kononenko, L. I. Formalization of Inverse Problems and its Applications, *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 49–56 (in Russian). DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
3. Gutman, A. E. and Kononenko, L. I. The Inverse Problem of Chemical Kinetics as a Composition of Binary Correspondences, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 48–53 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
4. Mitropolsky, Yu. A. and Lykova, O. B. *Integral'nye mnogoobraziya v nelinejnoj mekhanike* [Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics], Moscow, Nauka, 1963, 512 p. (in Russian).
5. Vasil'eva, A. V. and Butuzov, V. F. *Singulyarno vozmuschennyye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* [Singularly Perturbed Equations in Critical Cases], Moscow, Moscow State University, 1978, 106 p. (in Russian).
6. Goldstein V. M. and Sobolev V. A. *Kachestvennyy analiz singulyarno vozmuschennykh sistem* [Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems], Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 1988 (in Russian).
7. Kononenko, L. I. On the Smoothness of Slow Surfaces of Singularly Perturbed Systems, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 109–125 (in Russian).
8. Kononenko, L. I. Slow Surfaces in Problems of Chemical Kinetics, *Mathematical Notes of YSU*, 2012, vol. 19, issue 2, pp. 49–67 (in Russian).
9. Tikhonov, A. N. On Independence of Solutions to Differential Equations on a Small Parameter, *Matematicheskii Sbornik*, 1948, vol. 22 (64), no. 2, pp. 193–204 (in Russian).
10. Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G. and Shishatskii, S. P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis], Moscow, Nauka, 1980, 287 p. (in Russian).
11. Romanov, V. G. Inverse Problems for Hyperbolic Systems, *Vychislitel'nye metody v matematicheskoy fizike, geofizike i optimal'nom upravlenii* [Numerical Methods in Mathematical Physics, Geophysics and Optimal Control], Novosibirsk, Nauka, 1978, pp. 75–83 (in Russian).
12. Romanov, V. G. and Slinyucheva L. I. Inverse Problem for Linear Hyperbolic Systems of the First Order, *Matematicheskie problemy geofiziki* [Math Problems Geophysics], Novosibirsk, Izdatelstvo VTS SO AN SSSR, 1972, no. 3, pp. 187–215 (in Russian).
13. Kozhanov, A. I. Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 657–675.
14. Kabanikhin, S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems], Novosibirsk, 2010, 458 p. (in Russian).
15. Anikonov, Yu. E. Some Questions in the Theory of Inverse Problems for Kinetic Equations, *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics], Novosibirsk, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Vychisl. Tsentr, 1985, pp. 28–41 (in Russian).
16. Golubyatnikov, V. P. An Inverse Problem for the Hamilton–Jacobi Equation on a Closed Manifold, *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 235–238. DOI: 10.1007/BF02674621.
17. Kononenko, L. I. Identification Problem for Singular Systems with Small Parameter in Chemical Kinetics, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2016, vol. 13, pp. 175–180 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.
18. Gutman, A. E. and Kononenko, L. I. Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 37–47. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17981.
19. Reshetnyak, Yu. G. *Kurs matematicheskogo analiza* [Mathematical Analysis Course], Novosibirsk, 1999, vol. 1; 2000, vol. 2. (in Russian).

Received November 5, 2022

LARISA I. KONONENKO

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,

4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,

Researcher

E-mail: larak@math.nsc.ru