Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 15–35

УДК 519.63
DOI 10.46698/c8748-9711-0633-d

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ АЛЛЕРА

М. Х. Бештоков[1]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`

Аннотация. Работа посвящена нелокальным краевым задачам для одномерных по пространству нагруженных уравнений Аллера с переменными коэффициентами и двумя операторами дробного дифференцирования Капуто с порядками α и β. Подобные задачи возникают в практике регулирования солевого режима почв, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка. Для численного решения поставленных задач на равномерной сетке построены разностные схемы. Методом энергетических неравенств при различных соотношениях между порядками дробной производной Капуто α и β получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решений нелокальных краевых задач. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи (в предположении существования решения дифференциальной задачи в классе достаточно гладких функций) со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$. В работе также приводится алгоритм численного решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Аллера с переменными коэффициентами и оператором Бесселя.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, априорная оценка, уравнение Аллера, нагруженные уравнения, обобщенное уравнение влагопереноса, дробная производная Капуто.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х.* Численные методы решения нелокальных краевых задач для обобщенных нагруженных уравнений Аллера // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 25, вып. 3.—С. 15–35. DOI: 10.46698/c8748-9711-0633-d.

1. Введение

В последнее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике, механике, биологии и других областях часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами фракталов (или фрактальных сред) могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. Для описания фрактальных сред и структур недостаточно использования дифференциальных уравнений целочисленного порядка, такие структуры адекватно могут быть описаны при помощи дробного исчисления, или дробных интегро-дифференциальных операторов. Дробным исчислением принято называть область математического анализа, в которой исследуются и применяются дробные производные и интегралы любого вещественного порядка. Одним из приложений этой теории является теория дифференциальных уравнений с дробными производными. Подробное описание применения дробного исчисления к различным областям науки и техники на современном этапе даны в монографиях [1–4].

Вопросы моделирования фильтрации и течения жидкости в трещиновато-пористых средах [5, 6], двухфазного течения в пористых средах с динамическим капиллярным давлением [7], переноса влаги [8, 9], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [10, 11], теплопроводности в двухтемпературных системах [12] и течения некоторых неньютоновских жидкостей [13] связаны с необходимостью исследования краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка псевдопараболического типа (уравнение Аллера) и более общего класса уравнений — уравнение типа Соболева [14].

В работе [15] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения Аллера с дробной по времени производной. Для задачи Коши выписывается единственное представление решения.

Численным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [16–27].

В данной работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для нагруженных обобщенных уравнений Аллера с переменными коэффициентами и дробной производной Капуто. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок для решений задач как в дифференциальном, так и в разностном виде при различных соотношениях между порядками дробной производной Капуто (α, β). Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно входных данных. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций). Подобные задачи возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка [21, с. 233]. В работе [22] для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка. Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе с учетом фрактальности почвенной среды следует задать условие

$$D\,\frac{\partial c}{\partial x} + A\partial_{0t}^{\alpha}\,\frac{\partial c}{\partial x} = h\partial_{0t}^{\alpha} c,$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности, $A, h = \mathrm{const} > 0$.

Настоящая работа является непосредственным продолжением серии работ автора, посвященных разностным методам решения нелокальных краевых задач для обобщенных уравнений Аллера [23–27].

2. Постановка нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Аллера

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для нагруженного обобщенного уравнения Аллера:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\beta}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$\Pi(0,t) = \beta_{11}(t)u(0,t) + \beta_{12}\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_{21}(t)u(l,t) + \beta_{22}\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t), \eta(x) \leqslant c_1, \quad \beta_{12}, \beta_{22} = \mathrm{const} \geqslant 0,$$

$$|\beta_{11}(t)|,\ |\beta_{21}(t)|,\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |k_x(x,t)|,\ |r_x(x,t)| \leqslant c_2, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\gamma}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\gamma}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка γ, $0 < \gamma < 1$, $\alpha \geqslant \beta$, x_0 — произвольное фиксированное число, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\beta}(\eta(x)u_x)$, $c_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 0, 1, 2$.

Будем предполагать, что решение задачи (1)–(4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными, а коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

3. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}u, u\big) = \big((ku_x)_x, u\big) + \big(\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)_x, u\big) + (ru_x, u) - \big(qu(x_0,t), u\big) + (f, u), \tag{6}$$

где скалярное произведение и норма имеют вид $(a,b) = \int_0^l ab dx$, $(a,a) = \|a\|_0^2$, a, b — заданные на $[0,l]$ функции.

Пользуясь неравенством Коши с ε, леммой 1 из [19], после несложных преобразований [27] с учетом

$$-\big(qu(x_0,t), u\big) = -\int_0^l qu(x_0,t)u\,dx \leqslant \frac{c_2}{2}\int_0^l \big(u^2(x_0,t) + u^2\big)\,dx$$
$$\leqslant \frac{lc_2}{2}\,u^2(x_0,t) + \frac{c_2}{2}\int_0^l u^2\,dx \leqslant M_1\big\|u\big\|_0^2 + \varepsilon\,\frac{lc_2}{2}\,\big\|u_x\big\|_0^2$$

из (6) находим

$$\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|u\big\|_0^2 + \int_0^l ku_x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\beta}(u_x)^2\,dx \leqslant u\,\Pi(x,t)\big|_0^l + M_2\big\|u\big\|_0^2 + \varepsilon M_3\big\|u_x\big\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\big\|f\big\|_0^2. \tag{7}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (7). Тогда получим

$$\begin{gathered} u(x,t)\Pi(x,t)\big|_0^l = u(l,t)\big(\mu_2(t) - \beta_{21}(t)u(l,t) - \beta_{22}\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big) \\ + u(0,t)\big(\mu_1(t) - \beta_{11}u(0,t) - \beta_{12}\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\big) \leqslant M_4\big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) \\ + M_5\big\|u\big\|_0^2 + \varepsilon M_6\big\|u_x\big\|_0^2 - \frac{\beta_{12}}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t) - \frac{\beta_{22}}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t). \end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая (8), из (7) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\beta}(u_x)^2\,dx+\|u_x\|_0^2+\beta_{12}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t)+\beta_{22}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_7\|u\|_0^2+\varepsilon M_8\|u_x\|_0^2+M_9\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big), \quad (9)$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{1}{2M_8}$, из (9) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\beta}(u_x)^2\,dx+\|u_x\|_0^2+\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_{10}\|u\|_0^2+M_{11}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big), \quad (10)$$

Применяя к обеим частям неравенства (10) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2+u^2(0,t)+u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_{12}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2+M_{13}\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|_0^2\Big). \quad (11)$$

На основании [19, лемма 2] из (11) находим априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha>\beta$

$$\|u\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|_0^2\Big), \quad (12)$$

2) в случае, когда $\alpha=\beta$

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\Big), \quad (13)$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$, $M=\mathrm{const}>0$, зависящее только от входных данных (1)–(4), $D_{0t}^{-\gamma}u=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t\frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка γ, $0<\gamma<1$.

Теорема 1. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,1}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\beta}u_{xx}(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедливы априорные оценки* (12) *при $\alpha>\beta$ и* (13) *при $\alpha=\beta$.*

Из априорных оценок (12), (13) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)–(4) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами [28, с. 170]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\varkappa_i(ku_x)_x+\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)_x+ru_x-q(x,t)u(x_0,t)+f(x,t), \quad (14)$$

где $\varkappa=\frac{1}{1+R}$, $R=\frac{0.5h|r|}{k}$ — разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ исходной дифференциальной задаче (14), (2)–(4) поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^{2}+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\varkappa_i\Big(a_iy^{(\sigma)}_{\bar x}\Big)_x+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_iy_{\bar x}\big)_x+b_i^{-j}a_iy^{(\sigma)}_{\bar x,i}+b_i^{+j}a_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}-d_i^j\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)+\varphi_i^j,\quad(15)$$

$$\varkappa_0a_1y^{(\sigma)}_{x,0}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})=\beta_{11}y^{(\sigma)}_0+0.5hd_0\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)+\tilde\beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0-\tilde\mu_1,\quad(16)$$

$$-\big(\varkappa_Na_Ny^{(\sigma)}_{\bar x,N}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar x,N})\big)=\beta_{21}y^{(\sigma)}_N+0.5hd_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)+\tilde\beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\tilde\mu_2,\quad(17)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad(18)$$

где

$$r(0,t)\leqslant0,\quad r(l,t)\geqslant0,\quad(19)$$

отметим, что условия (19) нужны для обеспечения порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ разностной схемы (15)–(18),

$$\tilde\beta_{12}=\beta_{12}+0.5h,\quad\tilde\mu_1(t_{j+\sigma})=\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0^j,$$

$$\tilde\beta_{22}=\beta_{22}+0.5h,\quad\tilde\mu_2(t_{j+\sigma})=\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N^j,$$

$$a_i^j=k(x_{i-0.5},t_{j+\sigma}),\quad\gamma_i=\eta(x_{i-0.5}),\quad b_i^j=\frac{r(x,t_{j+\sigma})}{k(x,t_{j+\sigma})},\quad\varphi=f(x_i,t_{j+\sigma})$$

$$y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j,\quad d_i^j=q(x_i,t_{j+\sigma}),\quad a_0^{(\gamma,\sigma)}=\sigma^{1-\gamma},$$

$$r(x,t_{j+\sigma})=r^+(x,t_{j+\sigma})+r^-(x,t_{j+\sigma}),\quad|r(x,t_{j+\sigma})|=r^+(x,t_{j+\sigma})-r^-(x,t_{j+\sigma}),$$

$$r^+(x,t_{j+\sigma})=\frac{r(x,t_{j+\sigma})+|r(x,t_{j+\sigma})|}{2}\geqslant0,\quad r^-(x,t_{j+\sigma})=\frac{r(x,t_{j+\sigma})-|r(x,t_{j+\sigma})|}{2}\leqslant0,$$

$$a_l^{(\gamma,\sigma)}=(l+\sigma)^{1-\gamma}-(l-1+\sigma)^{1-\gamma},\quad l\geqslant1,$$

$$b_l^{(\gamma,\sigma)}=\frac{1}{2-\gamma}\left[(l+\sigma)^{2-\gamma}-(l-1+\sigma)^{2-\gamma}\right]-\frac12\left[(l+\sigma)^{1-\gamma}+(l-1+\sigma)^{1-\gamma}\right],\quad l\geqslant1,$$

$$\text{при } j=0,\quad c_0^{(\gamma,\sigma)}=a_0^{(\gamma,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0,\quad c_s^{(\gamma,\sigma)}=\begin{cases}a_0^{(\gamma,\sigma)}+b_1^{(\gamma,\sigma)}, & s=0,\\ a_s^{(\gamma,\sigma)}+b_{s+1}^{(\gamma,\sigma)}-b_s^{(\gamma,\sigma)}, & 1\leqslant s\leqslant j-1,\\ a_j^{(\gamma,\sigma)}-b_j^{(\gamma,\sigma)}, & s=j,\end{cases}$$

$$c_s^{(\gamma,\sigma)}>\frac{1-\gamma}{2}(s+\sigma)^{-\gamma}>0,\quad x^-_{i_0}=\frac{x_{i_0+1}-x_0}{h},\quad x^+_{i_0}=\frac{x_0-x_{i_0}}{h},\quad x_{i_0}\leqslant x_0\leqslant x_{i_0+1},$$

$\sigma=1-\frac{\gamma}{2}$, при $\alpha=\beta$ и $\sigma=0.5$, при $\alpha\neq\beta$, $\Delta^{\gamma}_{0t_{j+\sigma}}y=\frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{s=0}^{j}c^{(\gamma,\sigma)}_{j-s}y^s_t$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка γ, $0<\gamma<1$, [20] с порядком аппроксимации $O(\tau^{3-\gamma})$ при $\sigma=1-\frac{\gamma}{2}$, и $O(\tau^{2-\gamma})$ при $\sigma=0.5$. Введем скалярные произведения и норму:

$$[u,v]=\sum_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}\qquad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\quad [u,u]=[1,u^2]=\|[u]\|_0^2.$$

Перепишем (15)–(18) в операторной форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\overline{\delta}y+\overline{\Phi},\tag{20}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{21}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}=\begin{cases}\widetilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x+b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}-d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big),\\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)}=\dfrac{2}{h}\left(\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}-0.5hd_0\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)\right), & i=0,\\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)}=\dfrac{2}{h}\left(-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}-0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)\right), & i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\delta}y=\begin{cases}\delta y_i=\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\bar{x}})_x, & i=\overline{1,N-1},\\ \delta^-y_0=\dfrac{2}{h}\left(\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})-\beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\right), & i=0,\\ \delta^+y_N=\dfrac{2}{h}\left(-\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})-\beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right), & i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i, & i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^-=\dfrac{2}{h}\left(\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0^j\right), & i=0,\\ \varphi^+=\dfrac{2}{h}\left(\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N^j\right), & i=N.\end{cases}\qquad \begin{cases}\varkappa=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}},\\ \varkappa_0=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, & r_0\leqslant 0,\\ \varkappa_N=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, & r_N\geqslant 0,\end{cases}$$

$$r_0=r(0,t_{j+\sigma})=r_0^{j+\sigma}\leqslant 0,\quad r_N=r(x_N,t_{j+\sigma})=r_N^{j+\sigma}\geqslant 0.$$

Умножим теперь (20) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\Big]=\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\bar{\delta}y,y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\overline{\Phi},y^{(\sigma)}\Big].\tag{22}$$

Пользуясь леммой 1 из [20], первой разностной формулой Грина, неравенством Коши — Буняковского и ε-неравенством [28, с. 110], после некоторых преобразований с учетом

$$-\Big[d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big),y^{\sigma}\Big]=-\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)[d,y^{\sigma}]\leqslant\frac{1}{2}\left(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left[d,y^{(\sigma)}\right]^2\leqslant\left(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-\right)^2+\left(y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\right)^2+\frac{Nc_2^2}{2}\Big[1,\left(y^{(\sigma)}\right)^2\Big]\leqslant M_1\|[y^{(\sigma)}]\|_0^2+\varepsilon M_2\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]\|_0^2$$

из (22) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|[y]\|_1^2+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}|[y_{\bar{x}}]|_0^2+\|[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]\|_0^2\leqslant M_3\|[y^{(\sigma)}]\|_1^2+\varepsilon M_4\|[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]\|_0^2+M_5\left(\|[\varphi]\|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right),\tag{23}$$

где $|[y]|_1^2=|[y]|_0^2+y_0^2+y_N^2$.

I случай. Пусть $\alpha > \beta$, тогда выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2M_4}$, из (23) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big|[y]\big|^2_1 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}|[y_{\bar{x}}]|^2_0 + \big|[y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]\big|^2_0 \leqslant M_6\big|[y^{(\sigma)}]\big|^2_1 + M_7\big(\big|[\varphi]\big|^2_0 + \mu^2_1 + \mu^2_2\big). \tag{24}$$

Перепишем (24) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big|[y]\big|^2_1 \leqslant M^{\sigma}_8\big|[y^{j+1}]\big|^2_1 + M^{\sigma}_9\big|[y^{j}]\big|^2_1 + M_7\big(\big|[\varphi]\big|^2_0 + \mu^2_1 + \mu^2_2\big). \tag{25}$$

На основании [25, лемма 4] из (25) получаем

$$\big|[y^{j+1}]\big|^2_0 \leqslant M\Big(\big|[y^0]\big|^2_0 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big|[\varphi^{j'}]\big|^2_0 + \mu^2_1 + \mu^2_2\Big)\Big), \tag{26}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

II случай. Пусть $\alpha = \beta$, тогда перепишем (23) в следующем виде:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big|[y]\big|^2_2 \leqslant M^{\sigma}_{10}\big|[y^{j+1}]\big|^2_2 + M^{\sigma}_{11}\big|[y^{j}]\big|^2_2 + M_7\big(\big|[\varphi]\big|^2_0 + \mu^2_1 + \mu^2_2\big), \tag{27}$$

где $|[y]|^2_2 = |[y]|^2_{W^1_2(0,l)} + y^2_0 + y^2_N$, $|[y]|^2_{W^1_2(0,l)} = |[y]|^2_0 + |[y_{\bar{x}}]|^2_0$.

На основании леммы 4 [25] из (27) получаем

$$\big|[y^{j+1}]\big|^2_{W^1_2(0,l)} \leqslant M\Big(\big|[y^0]\big|^2_{W^1_2(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big|[\varphi^{j'}]\big|^2_0 + \mu^2_1 + \mu^2_2\Big)\Big), \tag{28}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), (19), *тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (15)–(18) *справедливы априорные оценки* (26) *при* $\alpha > \beta$ *и* (28) *при* $\alpha = \beta$.

Из априорных оценок (26), (28) следуют единственность и устойчивость решения задачи (15)–(18) по начальным данным и правой части.

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (15)–(18). Для этого рассмотрим однородную задачу ($\varphi = 0$, $\tilde{\mu}_1 = 0$, $\tilde{\mu}_2 = 0$, $u_0(x) = 0$), решение которой заведомо существует:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \varkappa_i\Big(a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big)_x + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_i y_{\bar{x}}\big)_x + b^{-j}_i a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b^{+j}_i a_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i} - d^j_i\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big), \tag{29}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0}) = \beta_{11}y^{(\sigma)}_0 + 0.5hd_0\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + \tilde{\beta}_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0, \tag{30}$$

$$-\big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\bar{x},N})\big) = \beta_{21}y^{(\sigma)}_N + 0.5hd_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + \tilde{\beta}_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N, \tag{31}$$

$$y(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h. \tag{32}$$

Пусть $y(x,t)$ — одно из решений однородной задачи (29)–(32). Из неравенства (26) следует, что $|[y^{j+1}]|^2_0 \leqslant 0$, а из (28) — $|[y^{j+1}]|^2_{W^1_2(0,l)} \leqslant 0$, но $|[y^{j+1}]|^2_0 = 0$ и $|[y^{j+1}]|^2_{W^1_2(0,l)} = 0$ лишь при $y = 0$, $x \in \bar{w}_h$. Поэтому из априорных оценок (26) при $\alpha > \beta$, (28) при $\alpha = \beta$ следуют, что единственным решением однородной задачи (29)–(32) является $y = 0$. Тем самым решение задачи (15)–(18) при любых φ, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}$, $u_0(x)$ существует и единственно.

Таким образом, из априорных оценок (26) при $\alpha > \beta$, (28) при $\alpha = \beta$ следуют существование, единственность и устойчивость решения задачи (15)–(18) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (15)–(18). Для оценки точности разностной схемы (15)–(18) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (15)–(18), получаем задачу для функции z:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i^j\Big(a_iz_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_iz_{\bar{x}}\big)_x+b_i^{-j}a_iz_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\\+b_i^{+j}a_{i+1}z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)+\Psi_i^j,\quad(33)$$

$$\varkappa_0a_1z_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1z_{x,0})=\beta_{11}z_0^{(\sigma)}+0.5hd_0\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)+\tilde{\beta}_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde{\nu}_1,\quad(34)$$

$$-\big(\varkappa_Na_Nz_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Nz_{\bar{x},N})\big)=\beta_{21}z_N^{(\sigma)}+0.5hd_N\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)\\+\tilde{\beta}_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\quad(35)$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad(36)$$

где $\Psi=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$, при $\alpha=\beta$, и $\Psi=O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, при $\alpha\neq\beta$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(4) разностной схемой (15)–(18) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1)–(4).

В случае, когда $\alpha>\beta$, применяя априорную оценку (26) к решению задачи (33)–(36), получаем неравенство

$$\big\|[z^{j+1}\big]\big\|_0^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big\|[\Psi^{j'}\big]\big\|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\Big),\quad(37)$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

В случае, когда $\alpha=\beta$, применяя априорную оценку (28) к решению задачи (33)–(36), получаем неравенство

$$\big\|[z^{j+1}\big]\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big\|[\Psi^{j'}\big]\big\|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\Big),\quad(38)$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорных оценок (37), (38) следует сходимость решения разностной задачи (15)–(18) к решению дифференциальной задачи (1)–(4) так, что существует такое τ_0, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедливы оценки:

1) в случае, когда $\alpha>\beta$

$$\big\|[y^{j+1}-u^{j+1}\big]\big\|_0\leqslant M\Big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\Big);$$

2) в случае, когда $\alpha=\beta$

$$\big\|[y^{j+1}-u^{j+1}\big]\big\|_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\big(h^2+\tau^2\big).$$

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$\partial^{\alpha}_{0t}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\partial^{\beta}_{0t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_{s=1}^{p}q_s(x,t)u(x_s,t)+f(x,t),$$
$$0<x<l,\quad 0<t\leqslant T,$$

если потребовать выполнения условия $|q_s|\leqslant c_2$.

Замечание 2. При построении алгоритма приближенного решения дифференциальной задачи (1)–(4) следует использовать метод параметрической прогонки [29, с. 131]. В виду того, что уравнение (1) содержит слагаемое $q(x,t)u(x_0,t)$ нарушается трехдиагональная структура матрицы коэффициентов разностной схемы (15)–(18) и использовать обычный метод прогонки не представляется возможным.

5. Постановка нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Аллера с оператором Бесселя

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\,\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T,\end{gathered} \tag{39}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m\Pi(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{40}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \beta_2\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{41}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{42}$$

где $0 \leqslant m \leqslant 2$, $\beta_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (40), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(0,t) = 0$ [28, с. 173], если функции $r(0,t)$, $k(0)$, $q(0,t)$, $f(0,t)$ конечны.

Уравнение Аллера с оператором Бесселя (39) возникает при переходе от трехмерного уравнения Аллера к цилиндрическим (сферическим) координатам в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ.

6. Априорная оценка в дифференциальной форме

Получим априорную оценку методом энергетических неравенств, для этого умножим уравнение (39) скалярно на $x^m u$:

$$\begin{aligned}\left(\partial_{0t}^{\alpha}u, x^m u\right) = \left(\left(x^m k u_x\right)_x, u\right) + \left(\partial_{0t}^{\beta}\left(x^m\eta u_x\right)_x, u\right)&\\ + \left(r u_x, x^m u\right) - \left(q u(x_0,t), x^m u\right) + \left(f, x^m u\right).&\end{aligned} \tag{43}$$

После некоторых несложных преобразований с учетом

$$\begin{aligned}-\left(q u(x_0,t), x^m u\right) = -\int_0^l x^m q u(x_0,t) u\,dx = -u(x_0,t)\int_0^l x^m q u\,dx&\\ \leqslant \frac{1}{2}\,u^2(x_0,t) + \frac{1}{2}\left(\int_0^l x^m q u\,dx\right)^2 \leqslant M_1\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_0^2 + \varepsilon M_2\left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|_0^2&\end{aligned}$$

из (43) находим

$$\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^l\eta\partial_{0t}^{\beta}\big(x^{\frac{m}{2}}u_x\big)^2\,dx+\int\limits_0^l x^mku_x^2\,dx$$
$$\leqslant x^m u\Pi(x,t)\big|_0^l+M_3\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\varepsilon M_4\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\frac{1}{2}\,\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \quad (44)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (44), тогда имеем

$$\begin{aligned} x^m u\Pi(x,t)\big|_0^l &= l^m u(l,t)\Pi(l,t)=l^m u(l,t)\big(\mu(t)-\beta_1(t)u(l,t)-\beta_2\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)\\ &= l^m u(l,t)\mu(t)-l^m u^2(l,t)\beta_1(t)-l^m\beta_2 u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\\ &\leqslant -\frac{l^m\beta_2}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)+M_5\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\varepsilon M_6\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+M_7\mu^2(t). \end{aligned} \quad (45)$$

Учитывая (45), из (44) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\int\limits_0^l\eta\partial_{0t}^{\beta}\big(x^{\frac{m}{2}}u_x\big)^2\,dx+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\beta_2\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_8\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\varepsilon M_9\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+M_{10}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu_2(t)\big). \quad (46)$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{1}{2M_9}$, из (46) получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\int\limits_0^l\eta\partial_{0t}^{\beta}\big(x^{\frac{m}{2}}u_x\big)^2\,dx+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_{11}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+M_{12}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu_2(t)\big). \quad (47)$$

Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+u^2(l,t)$$
$$\leqslant M_{13}D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+M_{14}\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0\big\|_0^2\Big). \quad (48)$$

На основании [19, лемма 2] из (48) получаем априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha>\beta$

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2$$
$$\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\big\|_0^2\Big); \quad (49)$$

2) в случае, когда $\alpha=\beta$

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\Big), \quad (50)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$, $M=\mathrm{const}>0$, зависящая только от входных данных задачи (39)–(42).

Теорема 3. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,1}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\beta} u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (39)–(42) *справедливы априорные оценки* (49) *при* $\alpha > \beta$ *и* (50) *при* $\alpha = \beta$.

Из априорной оценки (49) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

7. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (39)–(42) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned} \overline{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{1}{x_i^m} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} \left(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\bar{x},i} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \varphi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} (\gamma_1 y_{\bar{x},0}) = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 + d_0 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) - \tilde{\mu}_1, \tag{52}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} (\gamma_N y_{\bar{x},N}) = \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} + 0.5h d_N \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \tilde{\beta}_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \tilde{\mu}_2, \tag{53}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{54}$$

где

$$\tilde{\beta}_1 = \widetilde{\varkappa} \beta_1(t_{j+\sigma}), \quad \tilde{\beta}_2 = \widetilde{\varkappa} \beta_2 + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{0.5h}{m+1} \varphi_0^j, \quad \tilde{\mu}_2 = \widetilde{\varkappa} \mu(t_{j+\sigma}) + 0.5h \varphi_N^j,$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k_{0.5}^{j+\sigma}}}, \quad \text{если} \quad r_0^{j+\sigma} \leqslant 0, \qquad \varkappa_N = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}}, \quad \text{если} \quad r_N^{j+\sigma} \geqslant 0,$$

$$r = r^+ + r^-, \quad |r| = r^+ - r^-, \quad r^+ = 0.5(r + |r|) \geqslant 0, \quad r^- = 0.5(r - |r|) \leqslant 0,$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma}, & i = \overline{1, N-1}, \\ q_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i = \overline{1, N-1}, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = 0, \\ h, & i = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1 + R_i}, \quad R_i = \frac{0.5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}},$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \qquad \widetilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1 - \frac{0.5hm}{l}}.$$

Найдем априорную оценку методом энергетических неравенств, для этого перепишем (51)–(54) в операторном виде

$$\overline{\overline{\varkappa}} \Delta_{t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \bar{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \bar{\delta} y + \bar{\Phi}, \tag{55}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \tag{56}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}}=\begin{cases}\overline{\varkappa}_i, & x\in\omega_h,\\ 1, & x=0,l,\end{cases}\qquad \overline{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},$$

$$\bar\delta y=\begin{cases}\delta y_i=\dfrac{1}{x_i^m}\,\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\big(x^m_{i-0.5}\gamma_i y_{\bar x,i}\big)_x, & (x,t)\in\omega_{h,\tau}\\ \delta^- y_0=\dfrac{m+1}{0.5h}\,\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0}), & x=0,\\ \delta^+ y_N=-\dfrac{2}{h}\,\big(\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\bar x,N})+\widetilde{\varkappa}\beta_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\big), & x=l,\end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{\sigma}=\begin{cases}\tilde\Lambda(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)}=\dfrac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar x,i}\Big)_x+\dfrac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar x}\right)\\ \qquad\qquad+\dfrac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}a_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}\right)-d_i\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big),\\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)}=\dfrac{m+1}{0.5h}\left(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}-\dfrac{0.5h}{m+1}\,d_0\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\right), & x=0,\\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)}=-\dfrac{2}{h}\left(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{x,N}+\tilde\beta_1 y_N^{(\sigma)}+0.5hd_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\right), & x=l,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i, & (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \varphi^-=\dfrac{m+1}{0.5h}\,\tilde\mu_1, & x=0,\\ \varphi^+=\dfrac{1}{0.5h}\,\tilde\mu_2, & x=l.\end{cases}$$

Умножим теперь (55) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\Big(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^m y^{(\sigma)}\Big)=\Big(\bar\Lambda(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^m y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\bar\delta y,x^m y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\bar\Phi,x^m y^{(\sigma)}\Big], \tag{57}$$

где

$$(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_i v_i\hbar,\quad \|u]|_0^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\neq 0,N.\end{cases}$$

Пользуясь неравенством Коши с ε, после нетрудных преобразований из (57) получаем

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2},\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(x^{\frac{m}{2}}y\big)^2\Big]+\Big(\frac{\gamma_i}{2},\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\big(\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}\big)^2\Big]+\frac{1}{1+hM_1}\left(\overline{x}^{\,m}a_i\varkappa,\big(y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\big)^2\right]\\ \leqslant M_2\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\big]\big|_0^2\Big)-\Big(d\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big),x_i^m y^{(\sigma)}\Big)\\ +\big(\overline{x}^m_N-x^m_N\big)y^{(\sigma)}_N\big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\overline{x},N}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\overline{x},N})\big)-x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0})\big)\\ +\big(\varphi,x^m y^{(\sigma)}\big)+y^{(\sigma)}_N x^m_N\Big(\tilde\mu_2-\tilde\beta_1 y^{(\sigma)}_N-0.5hd_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)-\tilde\beta_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big).\end{gathered} \tag{58}$$

Рассмотрим третье, четвертое и шестое слагаемые в правой части (58):

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)}\left(\varkappa_N a_N y_{\overline{x}N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}(\gamma_N y_{\overline{x},N})\right) - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}(\gamma_1 y_{x,0})\right)\\
&\quad + x_N^m y_N^{(\sigma)}\Big(\tilde{\mu}_2 - \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - 0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\Big) - \tilde{\beta}_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)\\
&= \left(\overline{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)}\Big[\tilde{\mu}_2 - \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - 0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\Big) - \tilde{\beta}_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big]\\
&\quad + x_N^m y_N^{(\sigma)}\Big[\tilde{\mu}_2 - \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - 0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\Big) - \tilde{\beta}_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big]\\
&\quad - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\left[\beta_1\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\Big) + \frac{0.5h}{m+1}\,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \tilde{\mu}_1\right]\\
&\leqslant M_3\left(\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\right) + M_4\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{\sigma}\big]\big|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\Big)^2\Big) + \varepsilon M_5 \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\
&\quad - \frac{\tilde{\beta}_2}{2}\left(\overline{x}_N^m - x_N^m\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)}\, x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Учитывая преобразования (59), из (58) находим

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\right] + \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\big(\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\big)^2\right] + M_6 \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\
&\quad + \frac{h}{4(m+1)}\, x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2 + \left(\frac{\widetilde{\varkappa}\beta_2}{2}\, x_N^m + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2\\
&\leqslant M_7\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big) + M_8\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{\sigma}\big]\big|_0^2 + \big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\big)^2\Big) + \varepsilon M_9 \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Преобразуем первое и пятое слагаемые в левой части (60) с учетом $x_{N-0.5}^m \geqslant \frac{1}{6} x_N^m$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\right] + \left(\frac{\widetilde{\varkappa}\beta_2}{2}\, x_N^m + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2\\
&= \left(\frac{\overline{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\right) + \frac{0.5h}{2} x_N^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2 + \left(\frac{\widetilde{\varkappa}\beta_2}{2} x_N^m + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2\\
&= \left(\frac{\overline{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\right) + \left(\frac{\widetilde{\varkappa}\beta_2}{2}\,\bar{x}_N^m + \frac{0.5h}{2}\,\bar{x}_N^m\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2 \geqslant \frac{M_{10}}{2}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big)\\
&\quad + \frac{h}{4}\,\bar{x}_N^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2 \geqslant \frac{1}{4}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big) + \frac{0.5h}{12}\, x_N^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2 \geqslant \frac{1}{12}\,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}} y\big]\big|_0^2.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Учитывая (61), из (60) получаем

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}} y\big]\big|_1^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2 + \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\
&\qquad \leqslant M_{11}\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big]\big|_1^2 + \varepsilon M_{12}\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2 + M_{13}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big),
\end{aligned}
\tag{62}
$$

где $\big\|x^{\frac{m}{2}} y\big]\big|_1^2 = \big\|x^{\frac{m}{2}} y\big]\big|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\Big)^2$.

I случай. Пусть $\alpha > \beta$, тогда выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2M_{12}}$, из (62) получаем

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}} y\big]\big|_1^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2 + \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\
&\qquad \leqslant M_{14}\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big]\big|_1^2 + M_{15}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big).
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Перепишем (63) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_1^2 \leqslant M_{16}^{\sigma}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_1^2 + M_{17}^{\sigma}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j}\big]\big|_1^2 + M_{15}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big), \qquad (64)$$

На основании [25, лемма 4] из (64) получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_1^2 \leqslant M\left(\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{0}\big]\big|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big)\right), \qquad (65)$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

II случай. Пусть $\alpha = \beta$, тогда перепишем (62) в следующем виде:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_2^2 \leqslant M_{18}^{\sigma}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_2^2 + M_{19}^{\sigma}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j}\big]\big|_2^2 + M_{15}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big), \qquad (66)$$

где $\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_2^2 = \big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_0^2 + \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2$.

Пользуясь [25, лемма 4], из (66) находим априорную оценку

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_2^2 \leqslant M\left(\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{0}\big]\big|_2^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\Big)\right), \qquad (67)$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (5), (19), *тогда существуют такие* τ_0, h_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$, *то для решения разностной задачи* (51)–(54) *справедливы априорные оценки* (65) *при* $\alpha > \beta$ *и* (67) *при* $\alpha = \beta$.

Из априорных оценок (65), (67) следуют существование, единственность и устойчивость решения задачи (51)–(54) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (39)–(42), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (51)–(54). Для оценки точности разностной схемы (51)–(54) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (51)–(54), получаем задачу для функции z

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z = \frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(x_{i-0.5}^m\gamma_i z_{\bar{x},i}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i z_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)\\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x_{i+0.5}^m a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)}\right) - d_i^j\left(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\right) + \Psi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{aligned} \qquad (68)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 z_{\bar{x},0}) = \frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0 + d_0\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)\right) - \tilde{\nu}_1, \qquad (69)$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N z_{\bar{x},N}) = \tilde{\beta}_1 z_N^{(\sigma)} + 0.5hd_N\left(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\right) + \tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N - \tilde{\nu}_2, \qquad (70)$$

$$z(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \qquad (71)$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ при $\alpha = \beta$ и $\Psi = O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, $\tilde{\nu}_1 = O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, $\tilde{\nu}_2 = O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$ при $\alpha \neq \beta$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (39)–(42) разностной схемой (51)–(54) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (39)–(42).

В силу того, что задача (68)–(71) линейна, применяя априорные оценки (65), (67) к задаче (68)–(71), получаем оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$

$$\left\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\right]\!\Big|_1^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \left(\left\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\right\|_0^2 + \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2\right), \tag{72}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ;

2) в случае, когда $\alpha = \beta$

$$\left\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\right]\!\Big|_2^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \left(\left\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\right\|_0^2 + \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2\right), \tag{73}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Из оценок (72), (73) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (51)–(54) по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи (51)–(54) к решению дифференциальной задачи (39)–(42) со скоростью $O\left(h^2 + \tau^2\right)$ так, что если существуют такие τ_0, h_0, то при $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$ справедливы априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right]\!\Big|_1 \leqslant M\left\|x^{\frac{m}{2}}\right\|_0\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right) \leqslant \overline{M}\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right);$$

2) в случае, когда $\alpha = \beta$

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right]\!\Big|_2 \leqslant M\left\|x^{\frac{m}{2}}\right\|_0\left(h^2 + \tau^2\right) \leqslant \overline{M}\left(h^2 + \tau^2\right),$$

где $\overline{M} = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ,

Замечание 3. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (39) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\,\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{s=1}^{p} q_s(x,t) u(x_s,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \end{aligned}$$

если потребовать выполнения условия $|q_s| \leqslant c_2$.

8. Алгоритм численного решения

Для численного решения задачи (39)–(42) воспользуемся методом параметрической прогонки [29, с. 131] и приведм разностную схему (51)–(54) к расчетному виду. Тогда уравнение (51) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2\tau\sigma x_i^m d_i^j\left(y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^{+}\right) = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{74}$$

где

$$A_i = \tau\sigma\varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j + \gamma_i x_{i-0.5}^m \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h\sigma x_{i-0.5}^m b_i^{-j} a_i^j,$$

$$B_i = \tau\sigma\varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} x_{i+0.5}^m \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h\sigma x_{i+0.5}^m b_i^{+j} a_{i+1}^j,$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2\overline{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2\tau x_i^m \varphi_i^j - h^2 x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(y_i^{s+1} - y_i^s\right)$$

$$+ \frac{x_{i+0.5}^m \tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left((\gamma_{i+1} y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1} y_{i+1})^s\right) - \tau(1-\sigma) h^2 x_i^m d_i^j \left(y_{i_0}^j x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^j x_{i_0}^+\right)$$

$$- \frac{x_i^m \tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^{s+1} - ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^s\right)$$

$$+ \frac{x_{i-0.5}^m \tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left((\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s\right),$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j - \gamma_i x_{i-0.5}^m \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h(1-\sigma) x_{i-0.5}^m b_i^{-j} a_i^j,$$

$$BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j - \gamma_{i+1} x_{i+0.5}^m \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h(1-\sigma) x_{i+0.5}^m b_i^{+j} a_{i+1}^j,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2\overline{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Краевое условие (52) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_{11} y_1 + \varkappa_{12} y_{i_0} + \varkappa_{13} y_{i_0+1} + \mu_1, \tag{75}$$

где

$$\varkappa_{11} = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\varkappa_{12} = \frac{-\frac{0.5}{m+1} d_0 \sigma h \tau (x_{i_0+1} - x_0)}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\varkappa_{13} = \frac{-\frac{0.5}{m+1} d_0 \sigma h \tau (x_0 - x_{i_0})}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\mu_1 = \Bigg[\widetilde{\mu}_1 h\tau + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1 \left(y_1^j - y_0^j\right) - \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} \left(y_1^j - y_0^j\right) + \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha}\, c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0$$

$$- \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(y_0^{s+1} - y_0^s\right) + \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left((\gamma_1 y_1)^{s+1} - \left(\gamma_1 y_1\right)^s\right)$$

$$- \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left((\gamma_1 y_0)^{s+1} - (\gamma_1 y_0)^s\right) - \frac{0.5}{m+1} h^2 \tau (1-\sigma) d_0 x_{i_0}^- y_{i_0}$$

$$- \frac{0.5}{m+1} h^2 \tau (1-\sigma) d_0 x_{i_0}^+ y_{i_0+1}\Bigg] \Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{0.5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha}\, c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].$$

Краевое условие (53) принимает вид

$$y_N = \varkappa_{21} y_{N-1} + \varkappa_{22} y_{i_0} + \varkappa_{23} y_{i_0+1} + \mu_2, \tag{76}$$

где

$$\varkappa_{21} = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_1^j + \big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\varkappa_{22} = \frac{-0.5 d_N \sigma h\tau(x_{i_0+1} - x_0)}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_1^j + \big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\varkappa_{23} = \frac{-0.5 d_N \sigma h\tau(x_0 - x_{i_0+1})}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_1^j + \big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\mu_2 = \Big[\widetilde{\mu}_2 h\tau - (1-\sigma)h\widetilde{\varkappa}\tau\beta_1 y_N^j - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N\big(y_N^j - y_{N-1}^j\big)$$

$$+\gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}\big(y_N^j - y_{N-1}^j\big) + \big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N$$

$$-\big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \big(y_N^{s+1} - y_N^s\big) - \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \Big(\big(\gamma_N y_N\big)^{s+1}$$

$$-\big(\gamma_N y_N\big)^s\Big) - 0.5h^2\tau(1-\sigma) d_N x_{i_0}^- y_{i_0} + \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \Big(\big(\gamma_N y_{N-1}\big)^{s+1} - \big(\gamma_N y_{N-1}\big)^s\Big)$$

$$-0.5h^2\tau(1-\sigma) d_N x_{i_0}^+ y_{i_0+1}\Big] \Big/ \Big[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_1^j + \big(\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h\big) h \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\Big].$$

Условия устойчивости метода прогонки

$$A_i \neq 0,\ B_i \neq 0,\ C_i \geqslant |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \varkappa_{11} \leqslant 1,\ \varkappa_{21} \leqslant 1$$

выполнены при $\sigma \neq 0$.

Таким образом, с учетом (74)–(76), разностная схема (51)–(54) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2\tau\sigma x_i^m d_i\big(y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^+\big) = -F_i^j, \\ y_0 = \varkappa_{11} y_1 + \varkappa_{12} y_{i_0} + \varkappa_{13} y_{i_0+1} + \widetilde{\mu}_{11}, \\ y_N = \varkappa_{21} y_{N-1} + \varkappa_{22} y_{i_0} + \varkappa_{23} y_{i_0+1} + \widetilde{\mu}_{21}, \\ y_i^0 = u_0(x). \end{cases} \tag{77}$$

Решение системы (77) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} y_{i_0} + \gamma_{i+1} y_{i_0+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{78}$$

Найдем теперь α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i = \overline{1, N}$.

Из условия (75) следует, что

$$\alpha_1 = \varkappa_{11}, \quad \beta_1 = \varkappa_{12}, \quad \gamma_1 = \varkappa_{13}, \quad \delta_1 = \widetilde{\mu}_{11}.$$

Подставляя $y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}y_{i_0} + \gamma_{i+1}y_{i_0+1} + \delta_{i+1}$, $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i y_{i_0} + \gamma_i y_{i_0+1} + \delta_i$ в (74), получим

$$\begin{gathered}
\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_iB_i - h^2\tau\sigma x_i^m d_i x_{i_0}^-}{C_i - A_i\alpha_i}, \\
\gamma_{i+1} = \frac{A_i\gamma_i - h^2\tau\sigma x_i^m d_i x_{i_0}^+}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \delta_{i+1} = \frac{F_i^j + A_i\delta_i}{C_i - A_i\alpha_i}.
\end{gathered} \tag{79}$$

Выразим неизвестные y_i, $i = \overline{0, N}$, через y_{i_0}, y_{i_0+1} следующим образом:

$$y_i = H_i y_{i_0} + T_i y_{i_0+1} + \Phi_i. \tag{80}$$

В (80) найдем H_N, T_N, Φ_N. Тогда учитывая условие (76), а также $y_N = H_N y_{i_0} + T_N y_{i_0+1} + \Phi_N$, $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N y_{i_0} + \gamma_N y_{i_0+1} + \delta_N$, получим

$$H_N = \frac{\varkappa_{21}\beta_N + \varkappa_{22}}{1 - \varkappa_{21}\alpha_N}, \quad T_N = \frac{\varkappa_{21}\gamma_N + \varkappa_{23}}{1 - \varkappa_{21}\alpha_N}, \quad \Phi_N = \frac{\varkappa_{21}\delta_N + \widetilde{\mu}_{21}}{1 - \varkappa_{21}\alpha_N}.$$

Найдем теперь H_i, T_i, Φ_i. Тогда, подставляя (80) в (78), получим

$$H_i = \alpha_{i+1}H_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad T_i = \alpha_{i+1}T_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad \Phi_i = \alpha_{i+1}\Phi_{i+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0}. \tag{81}$$

Выразим y_{i_0}, y_{i_0+1} через H_i, T_i, Φ_i. Для этого рассмотрим выражения

$$y_{i_0} = H_{i_0} y_{i_0} + T_{i_0} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0}, \tag{82}$$

$$y_{i_0+1} = H_{i_0+1} y_{i_0} + T_{i_0+1} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0+1}. \tag{83}$$

Учитывая (82), (83), получим

$$y_{i_0+1} = \frac{H_{i_0+1}\Phi_{i_0} + \Phi_{i_0+1}(1 - H_{i_0})}{(1 - H_{i_0})(1 - T_{i_0+1}) - T_{i_0}H_{i_0+1}}, \quad y_{i_0} = \frac{T_{i_0}}{1 - H_{i_0}} y_{i_0+1} + \frac{\Phi_{i_0}}{1 - H_{i_0}}. \tag{84}$$

Из (80), (84) находим решение y_i системы (77).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.—512 с.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
4. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—San Diego: Academic Press, 1999.—368 p.
5. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах.—М.: Недра, 1984.—447 с.
6. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, №. 4.—С. 689–700.
7. *Cuesta C., van Duijn C. J., Hulshof J.* Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves // Eur. J. Appl. Math.—2000.—Vol. 11, № 4.—P. 381–397. DOI: 10.1017/s0956792599004210.
8. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—353 с.
9. *Hallaire M.* Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L'Eau et la Production Vegetale.—Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964.—Vol. 9.—P. 27–62.
10. *Colton D. L.* On the analytic theory of pseudoparabolic equations // Quart. J. Math.—1972.—Vol. 23.—P. 179–192.

11. *Дзекцер Е. С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, №. 3.—С. 540–543.
12. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).—1968.—Vol. 19, № 4.—P. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969.
13. *Ting T. W.* Certain non-steady flows of second-order fluids // Arch. Ration. Mech. Anal.—1963.—Vol. 14.—P. 1–26.
14. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.—М.: Физматлит, 2007.—736 с.
15. *Беданокова С. Ю.* Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. 4: Естеств.-мат. и техн. науки.—2007.—Т. 4.—С. 68–71.
16. *Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткий И. А.* Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае.—М.: ИБРАЭ РАН, 2003.
17. *Лафишева М. М.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
18. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
19. *Diethelm K., Walz G.* Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numerical Algorithms.—1997.—Vol. 16.—P. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
20. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
21. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
22. *Нерпин С. В., Чудновский А. Ф.* Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух.—Л.: Гидрометеоиздат, 1975.—358 с.
23. *Нигматуллин Р. Р.* Особенности релаксации системы с «остаточной» памятью // Физ. твердого тела.—1985.—Т. 27, № 5.—С. 1583–1585.
24. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений Соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 2.—С. 249–266. DOI: 10.1134/S0374064118020115.
25. *Beshtokov M. Kh.* The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.—2016.—Vol. 158, № 1.—P. 1–6. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
26. *Бештоков М. Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.
27. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса и разностные методы их численной реализации // Прикл. матем. и физ.—2020.—Т. 52, № 2.—С. 128–138. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-128-138.
28. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного по времени порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2020.—Т. 30, № 2.—С. 158–175.
29. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
30. *Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.* Численные методы расчета одномерных систем.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1981.—208 с.

Статья поступила 18 апреля 2022 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 15–35

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR GENERALIZED LOADED HALLAIRE EQUATIONS

Beshtokov, M. Kh.[1]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360004, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to nonlocal boundary value problems for one-dimensional space-loaded Hallaire equations with variable coefficients and two Caputo fractional differentiation operators with orders α and β. Similar problems arise in the practice of regulating the salt regime of soils, when the stratification of the upper layer is achieved by draining the water layer from the surface of a site flooded for some time. Difference schemes are constructed for the numerical solution of the problems posed on a uniform grid. Using the method of energy inequalities for various relations between the orders of the fractional Caputo derivative α and β, we obtain a priori estimates in differential and difference interpretations for solutions of nonlocal boundary value problems. The obtained a priori estimates imply uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and the initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding original differential problem (assuming the existence of a solution to the differential problem in the class of sufficiently smooth functions) at a rate of $O(h^2+\tau^2)$ for $\alpha=\beta$ and $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ for $\alpha\neq\beta$. The paper also presents an algorithm for the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a loaded Hallaire equation with variable coefficients and a Bessel operator.

Keywords: nonlocal boundary value problems, a priori estimate, Hallaire equation, loaded equations, generalized moisture transfer equation, Caputo fractional derivative.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokov, M. Kh.* Numerical Methods for Solving Nonlocal Boundary Value Problems for Generalized Loaded Hallaire Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 15–35 (in Russian). DOI: 10.46698/c8748-9711-0633-d.

References

1. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
2. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives], Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 p. (in Russian).
3. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
4. *Podlubny, I. Fractional Differential Equations*, San Diego, Academic Press, 1999, 368 p.
5. *Barenblatt, G. I., Entov, V. M. and Ryzhik, V. M. Dvizheniye zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Movement of Liquids and Gases in Natural Reservoirs], Moscow, Nedra, 1984, 447 p. (in Russian).
6. *Shkhanukov, M. Kh.* Some Boundary Value Problems for a Third-Order Equation That Arise in the Modeling of the Filtration if a Fluid in Porous Media, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–700 (in Russian).
7. *Cuesta, C., van Duijn, C. J. and Hulshof, J.* Infiltration in Porous Media with Dynamic Capillary Pressure: Travelling Waves, *European Journal of Applied Mathematics*, 2000, vol. 11, no. 4, pp. 381–397. DOI: 10.1017/s0956792599004210.
8. *Chudnovskiy, A. F. Teplofizika pochv* [Thermal Physics of Soils], Moscow, Nauka, 1976, 353 p. (in Russian).
9. *Hallaire, M.* Le Potentiel Efficace de L'eau Dans le Sol en Regime de Dessechement, *L'Eau et la Production Vegetale*, Paris, Institut National de la Recherche Agronomique, 1964, vol. 9, pp. 27–62.
10. *Colton, D. L.* On the Analytic Theory of Pseudoparabolic Equations, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1972, vol. 23, pp. 179–192.
11. *Dzektser, E. S.* Equations of Motion of Groundwater with a Free Surface in Multilayer Media, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1975, vol. 220, no. 3, pp. 540–543 (in Russian).
12. *Chen, P. J. and Gurtin, M. E.* On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures, *Journal of Applied Mathematics and Physics* (*ZAMP*), 1968, vol. 19, no. 4, pp. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969.

13. *Ting, T. W.* Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1963, vol. 14, pp. 1–26.
14. *Sveshnikov, A. G., Alshin, A. B., Korpusov, M. O. and Pletner, Yu. D. Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Equations of the Sobolev Type], Moscow, Fizmatlit, 2007, 736 p. (in Russian).
15. *Bedanokova, S. Yu.* The Equation of Soil Moisture Movement and the Mathematical Model of Moisture Content of the Soil Layer, Based on the Hallaire's Equation, *Vestnik Adygeyskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 4: Yestestvenno-Matematicheskiye i Tekhnicheskiye Nauki*, 2007, vol. 4, pp. 68–71 (in Russian).
16. *Goloviznin, V. M., Kiselev, V. P. and Korotkiy, I. A. Chislennye metody resheniya uravneniya drobnoy diffuzii s drobnoy proizvodnoy po vremeni v odnomernom sluchae* [Computational Methods for One-Dimensional Fractional Diffusion Equations], Moscow, Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, 2003, 35 p. (in Russian).
17. *Lafisheva, M. M., Shhanukov-Lafishev, M. H.* Locally One-Dimensional Difference Schemes for the Fractional Order Diffusion Equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no.10, pp. 1875–1884.
18. *Diethelm, K. and Walz, G.* Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, pp. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
19. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
20. *Alikhanov, A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
21. *Nerpin, S. V. and Chudnovskiy, A. F. Energo- i massoobmen v sisteme rasteniye–pochva–vozdukh* [Energy and Mass Transfer in the Plant–Soil–Air System], Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975, 358 p. (in Russian).
22. *Nigmatulin, R. R.* Relaxation Features of a System with Residual Memory, *Fizika Tverdogo Tela* [Physics of the Solid State], 1985, vol. 27, no. 5, pp. 1583–1585 (in Russian).
23. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for Degenerating and Non-Degenerating Sobolev-Type Equations with a Nonlocal Source in Differential and Difference Forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. DOI: 10.1134/S0012266118020118.
24. *Beshtokov, M. Kh.* The Third Boundary Value Problem for Loaded Differential Sobolev Type Equation and Grid Methods of Their Numerical Implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 58, no. 1, pp. 1–6. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
25. *Beshtokov, M. Kh.* To Boundary Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.
26. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for the Generalized Modified Moisture Transfer Equation and Difference Methods for Their Numerical Realization, *Prikladnaya Matematika i Fizika* [Applied Mathematics and Physics], 2020, vol. 52, no. 2, pp. 128–138 (in Russian). DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-128-138.
27. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Loaded Modified Time-Fractional Moisture Transfer Equation with a Bessel Operator and Difference Methods for Their Solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 158–175 (in Russian).
28. *Samarskii, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
29. *Voyevodin, A. F. and Shugrin, S. M. Chislennyye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems], Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch, 1981, 208 p. (in Russian).

Received April 18, 2022

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211