Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 2, С. 89–102

УДК 517.95, 517.956.3, 517.957.7
DOI 10.46698/i3568-6388-7809-u

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ С ПОДАТЛИВЫМИ СТЕНКАМИ

М. Ю. Жуков[1,2], Н. М. Полякова[1]

[1] Южный федеральный университет, ИММКН им. И. И. Воровича,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: myzhukov@sfedu.ru, nmzhukova@sfedu.ru

Аннотация. Для вращательно симметричного безвихревого течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с податливыми стенками (compliant tube) на основе теории мелкой воды (лагранжев подход) построено нелинейное амплитудное уравнение, описывающее поведение конечных возмущений в окрестности волн, распространяющихся вдоль характеристик. Считается, что течение происходит в бесконечной цилиндрической области, имеющей свободную поверхность, на которой выполнены кинематическое и динамические условия с учетом поверхностного натяжения. Характерный размер цилиндрической области в осевом направлении считается много бо́льшим, чем характерный размер в радиальном направлении. Обнаружено, что в случае рассматриваемого безвихревого течения (уравнения Навье — Стокса), уравнения течения не содержат членов, учитывающих вязкость (совпадают с уравнениями идеальной несжимаемой жидкости — уравнениями Эйлера). Влияние вязкости жидкости учитывается лишь за счет динамического краевого условия на границе. Амплитудное уравнение имеет вид уравнения Кортевега-де Вриза — Бюргерса, решение которого достаточно хорошо изучено аналитическими, асимптотическими и численными методами. Вычислены коэффициенты уравнения и, в зависимости от их значений, проведен качественный анализ поведения возмущений. Построенное амплитудное уравнение и возникающие в процессе построения, как главный член асимптотики, квазилинейные гиперболические уравнения, а также уравнения для конечных возмущений, можно использовать для описания течения струи жидкости и/или течения крови в аорте. В принципе, и квазилинейные уравнения, и амплитудное уравнение, и уравнения для конечных возмущений, полученные, как правило, при помощи метода осреднения, известны и широко используются, в частности, для моделирования течения крови. Однако, при конструировании известных моделей при помощи метода осреднения используется большое количество эвристических предположений, зачастую слабо обоснованных. Предлагаемый в представленной работе способ построения моделей математически более корректен и не содержит никаких предположений, кроме сформулированного при постановке задачи требования о безвихревом характере течения и порядке малости параметров (вязкости, поверхностного натяжения). Кроме этого, дано сравнение полученных уравнений с уравнениями метода осреднения и вычислен поправочный коэффициент. С математической точки зрения, построенные модели течений представляют собой уравнения для определения главного и последующего членов асимптотики.

Ключевые слова: амплитудное уравнение Кортевега-де Вриза — Бюргерса, квазилинейные гиперболические уравнения, безвихревое течение несжимаемой жидкости, асимптотические разложения.

AMS Subject Classification: 76D05, 35B20, 35C20, 35L40, 35C10.

Образец цитирования: *Жуков М. Ю., Полякова Н. М.* Асимптотические модели течения в трубе с податливыми стенками // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 89–102. DOI: 10.46698/i3568-6388-7809-u.

Введение

Построению и исследованию уравнений, описывающих поведение жидкости в трубах с податливыми стенками, посвящено большое количество работ. Значительный интерес к указанной тематике связан в первую очередь с той ролью, которую играют такие уравнения в моделировании течения крови в артериях. Под трубой с податливой стенкой (compliant tube) понимается цилиндрическая область, боковая поверхность которой считается свободной границей, на которой выполнены кинематическое условие (граница движется вместе с жидкостью) и некоторые динамические условия. Начиная, по-видимому, с работы [1] (со ссылкой на [2]), для конструирования уравнений движения жидкости в трубе используется метод осреднения. Продолжением тематики работы [1] является ряд статей [1, 3–9] (см. также ссылки в работах Canic S. с соавторами).

В представленной работе используется иной подход к выводу уравнений — построение моделей типа уравнений мелкой воды. Для вращательно симметричного безвихревого течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области, характерный размер которой в осевом направлении много больше характерного размера в радиальном направлении, применяется разложение решения по малому параметру ε (отношение размеров) с последующим «проектированием» уравнений на свободную поверхность (лагранжев подход, см., например, [10, с. 32–39]). Это позволяет построить математические модели различного уровня сложности — (i) систему двух квазилинейных гиперболических уравнений (аналог классических уравнений мелкой воды), (ii) аналог уравнений Буссинеска (второе приближение теории мелкой воды) (см., например, [11, с. 19–23, 45–51], [10, с. 36–38]), а также (iii) амплитудное уравнение, описывающее нелинейные конечные возмущения линейных волн (уравнение Кортевега-де Вриза — Бюргерса), для вывода которого использованы результаты [12]. Обнаружено, что для безвихревого течения члены уравнений, описывающих движение жидкости, и соответствующие влиянию вязкости исчезают, и эффекты вязкости учитываются лишь при помощи краевых условий на свободной границе.

Конечно, для описания и исследования течения жидкости в кровеносных сосудах (трубах с податливыми стенками) можно использовать методы, отличные от осреднения и методов теории мелкой воды. В частности, в [13, 14] для исследования используется метод Галёркина непосредственно для исходных уравнений. При описании пульсирующих течений в основные уравнения включаются дополнительные источники и проводятся численные расчеты (см., например, [15–17]). Заметим, что один из недостатков метода осреднения заключается в невозможности восстановления структуры течения в исходных величинах (скорости, давления) по средним значениям. Напротив, предлагаемый способ построения моделей типа мелкой воды позволяет ответить на вопрос о том как устроена структура течения (см., в частности, монографию [18], в которой исследовано квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками и показано, что внутри канала возникают вихревые структуры).

В предлагаемой работе и в работах [1, 3–9] влияние стенок (свободной границы) учитывается уравнением «состояния» — влиянием окружающей среды на увеличение/уменьшение радиуса цилиндрической области. В принципе, можно отказаться от требований на свободной границе, заменив соответствующие краевые условия, например, условиями, отвечающими вязко-эластичным стенкам (см., в частности, [19–21]). Это приведет к иным моделям, но метод конструирования уравнений модели, предлагаемый в представленной работе (как, впрочем, и метод осреднения), останется по-прежнему применимым и эффективным.

Подчеркнем, что предлагаемый в представленной работе способ построения моделей математически более корректен, не содержит никаких предположений, кроме сформулированного при постановке задачи требования о безвихревом характере течения. С математической точки зрения, построенные модели течений представляют собой задачи для определения главного и последующего членов асимптотики.

1. Основные уравнения и соотношения

Рассматриваем течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{(r,z) : 0 \leqslant r \leqslant R(z,t),\ -\infty < z < +\infty\},$$

которая имеет свободную границу $r = R(z,t)$ (боковая поверхность).

Предполагаем, что течение вращательно симметрично и азимутальная скорость (скорость вращения) отсутствует. Для описания течения используем уравнения Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической системе координат (r, θ, z), которые в случае вращательной симметрии при нулевой азимутальной скорости в безразмерных переменных имеют вид (см., например, [22, с. 76])

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad \frac{d}{dt} = (\ \ )_t + u(\ \ )_r + w(\ \ )_z, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = -p_r + \mu\left(\frac{1}{r}(ru_r)_r - \frac{u}{r^2} + u_{zz}\right),$$

$$\frac{dw}{dt} = -p_z + \mu\left(\frac{1}{r}(rw_r)_r + w_{zz}\right).$$

Здесь $u(r,z,t)$ — радиальная, $v(r,z,t)$ — азимутальная $(v = 0)$, $w(r,z,t)$ — осевая компоненты скорости течения $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$, $p(r,z,t)$ — давление, $\mu = \mathrm{const}$ — кинематическая вязкость жидкости.

На свободной поверхности $r = R(z,t)$ задаем кинематическое условие

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z,t), \tag{2}$$

и динамическое условие, которое при постоянном поверхностном натяжении записываем в форме (см., например, [23, с. 97–100, 172, 179, 187–190])

$$-(p - p_0)\boldsymbol{n} + \mathbb{T}\cdot\boldsymbol{n} = \sigma K\boldsymbol{n}, \quad r = R(z,t), \tag{3}$$

где $\mathbb{T}$ — тензор вязких напряжений, p — давление, p_0 — давление окружающей среды, $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения, K — средняя кривизна поверхности.

Кроме этого, считаем, что вихрь скорости $\boldsymbol{\omega}$ равен нулю

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \quad \mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{v} = 0, \quad \mathrm{rot}_\theta\,\boldsymbol{v} = u_z - w_r = 0, \quad \mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{4}$$

Напомним, что при вращательно симметричном течении компоненты вихря скорости $\mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{v}$ и $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v}$ обращаются в нуль автоматически.

Естественно, помимо условий (2), (3), на оси $r = 0$ цилиндрической области требуем выполнения условий

$$u = 0, \quad w_r = 0, \quad r = 0.$$

1.1. Функция тока. Считаем, что течение происходит в цилиндрической области, характерный радиус которой много меньше характерного размера в осевом направлении. Сделаем замену переменных

$$r \to \varepsilon r, \quad u \to \varepsilon u, \quad \varepsilon \to 0, \tag{5}$$

где ε — параметр (малый), характеризующий соотношение размеров области.

В частности, после замен (5) уравнение (4) принимает вид

$$\varepsilon^2 u_z - w_r = 0, \tag{6}$$

который после введения функции тока ψ

$$ru = -\psi_z, \quad rw = \psi_r \tag{7}$$

позволяет получить задачу для определения ψ

$$r\left(\frac{1}{r}\psi_r\right)_r + \varepsilon^2\,\psi_{zz} = 0, \quad \psi\big|_{r=0} = 0. \tag{8}$$

Конечно, задача (8) недоопределена, и ее решение возможно лишь с точностью до некоторой функции. Такая ситуация типична при построении уравнений типа мелкой воды и соответствует подходу Лагранжа — поиск решения в виде рядов по степеням ε^2 [10, с. 32–39] с последующим сохранением конечного числа членов ряда.

Решение задачи (8) ищем в виде

$$\psi(r,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\psi^k(r,z,t). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), после громоздких преобразований, которые опущены, имеем

$$\psi^k(r,z,t) = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)}\partial_z^{2n} c_{k-n}(z,t),$$

где $c_m(z,t)$, $m = 0, 1, \dots, k$, — некоторые произвольные функции.

Тогда

$$\psi(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}(-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)}\partial_z^{2n}\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon^{2(k-n)}c_{k-n}(z,t)$$

или окончательно

$$\psi(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}(-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)}\partial_z^{2n}F(z,t) = \frac{1}{2}r^2F(z,t) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

$$F(z,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{2m}c_m(z,t).$$

Радиальную и осевую скорости вычисляем при помощи (7), (10):

$$\begin{aligned} u(r,z,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}(-1)^n \frac{r^{2n+1}}{((2n)!!)^2(2n+2)}\partial_z^{2n+1}F(z,t) \\ = -\frac{1}{2}rF_z(z,t) + \varepsilon^2\frac{1}{16}r^3F_{zzz}(z,t) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \tag{11}$$

$$w(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}(-1)^n \frac{r^{2n}}{((2n)!!)^2}\partial_z^{2n}F(z,t) = F(z,t) - \varepsilon^2\frac{1}{4}r^2F_{zz}(z,t) + O(\varepsilon^4). \tag{12}$$

Вычисление при помощи (11), (12) членов уравнений (1), связанных с учетом вязкости жидкости, показывает, что выполнены соотношения

$$\mu\left(\frac{1}{\varepsilon r}(ru_r)_r - \frac{u}{\varepsilon r^2} + \varepsilon u_{zz}\right) \equiv 0, \quad \mu\left(\frac{1}{\varepsilon^2 r}(rw_r)_r + w_{zz}\right) \equiv 0. \tag{13}$$

Иными словами, если рассматривать безвихревое течение жидкости, т. е. считать выполненным соотношение (6) и вытекающими из него соотношения (10)–(12), то уравнения вязкой жидкости (1) совпадают с уравнениями идеальной жидкости, которые после использования замены (5) принимают вид

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2\frac{du}{dt} = -p_r, \quad \frac{dw}{dt} = -p_z, \tag{15}$$

с кинематическим условием (2)

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z,t). \tag{16}$$

Динамическое условие (3) после проектирования на нормаль $\boldsymbol{n}$, касательный вектор $\boldsymbol{\tau}^z$ к границе и замены (5) принимает вид

$$-(p-p_0) + \boldsymbol{n}\cdot\mathbb{T}\cdot\boldsymbol{n} = K\sigma, \quad r = R(z,t), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\tau}^z\cdot\mathbb{T}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad r = R(z,t), \tag{18}$$

где

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathbb{T}\cdot\boldsymbol{n} = \mu(2u_r - 2w_rR_z) + O\big(\mu\varepsilon^2\big), \quad K = R_{zz}\varepsilon + O\big(\varepsilon^3\big), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\tau}^z\cdot\mathbb{T}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\mu}{\varepsilon}w_r + O(\mu\varepsilon).$$

Таким образом, учет вязкости в рассматриваемой модели осуществляется лишь за счет динамического условия на свободной поверхности.

2. Асимптотическая модель

На основе уравнений (14)–(19), сделав различные предположения о порядке малости параметров μ, σ, сохраняя члены различного порядка разложений в ряды (10)–(12) по параметру ε^2, можно конструировать модели различного уровня сложности. Основной способ построения моделей типа мелкой воды — «проектирование» уравнений на свободную границу $r = R(z,t)$.

Считаем, что параметры удовлетворяют соотношениям

$$\mu = \mu_0\varepsilon^2, \quad \sigma = \sigma_0\varepsilon, \quad \mu_0 = O(1), \quad \sigma_0 = O(1). \tag{20}$$

Заметим, что эти требования не являются критическими — общая схема построения асимптотической модели останется прежней. Выбор иных порядков малости параметров приведет лишь к изменению некоторых членов в окончательных соотношениях. В частности очевидно, что, например, выбор $\mu = \mu_1\varepsilon^3$, $\mu_1 = O(1)$, повлечет исчезновение в последующих соотношениях членов, связанных с вязкостью жидкости.

2.1. Проектирование на свободную границу. Дифференцируя (17) по z и сохраняя члены порядка $O(\varepsilon^2)$, с учетом (19) получим

$$p_{0,z}(R) - p_r(R,z,t)R_z - p_z(R,z,t) + \varepsilon^2(-\mu_0 F_{zz} - \sigma_0 R_{zzz}) = 0.$$

Очевидно, что $p_r(R,z,t)R_z$, $p_z(R,z,t)$ следует заменить, исходя из уравнений (15), проектированных на границу

$$p_{0,z}(R) + \varepsilon^2 R_z \frac{DU}{Dt} + \frac{DW}{Dt} + \varepsilon^2(-\mu_0 F_{zz} - \sigma_0 R_{zzz}) = 0. \tag{21}$$

Здесь

$$U(z,t) = -\frac{1}{2}RF_z + \varepsilon^2\frac{1}{16}R^3F_{zzz}, \quad W(z,t) = F - \varepsilon^2\frac{1}{4}R^2F_{zz}, \tag{22}$$

$$\frac{DU}{Dt} = U_t + WU_z, \quad \frac{DW}{Dt} = W_t + WW_z. \tag{23}$$

Кинематическое условие на свободной границе (16) с учетом (11), (12) записывается в виде

$$R_t + FR_z + \frac{1}{2}RF_z - \varepsilon^2\left(\frac{1}{4}R^2F_{zz}R_z + \frac{1}{16}R^3F_{zzz}\right) = 0. \tag{24}$$

Уравнение (21) после преобразований, с учетом (22), (23), принимает форму

$$\begin{gathered} F_t + FF_z + p_{0,z}(R) + \varepsilon^2\big(\mu_0 F_{zz} + \sigma_0 R_{zzz}\big) \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}\big(RF_{tz} + FRF_{zz}\big) + \frac{\varepsilon^2}{4}\big(RF_z^2 - R^2F_{tzz} - FR^2F_{zzz}\big) = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Соотношения (24), (25), дополненные уравнением состояния — зависимость давления внешней среды от радиуса цилиндрической области

$$p_0 = p_0(R), \tag{26}$$

описывают поведение течения в области со свободной границей. Уравнения подобного вида в случае уравнений мелкой воды известны как уравнения Буссинеска — второе приближение теории мелкой воды (см., например, [11, с. 19–23, 45–51], [10, с. 36–38]).

При $\varepsilon = 0$ уравнения (24), (25) представляют собой уравнения типа классической мелкой воды (или газовой динамики), которые удобно записывать в виде

$$S_t + WS_z + SW_z = 0, \quad S = R^2, \tag{27}$$

$$W_t + WW_z + p_{0,z}(S) = 0, \quad W = F. \tag{28}$$

Здесь S — площадь сечения (с точностью до множителя π) цилиндрической области, функция W при $\varepsilon = 0$ совпадает с F. Если $p_0(S) \sim S$, то уравнения (27), (28) являются в точности уравнениями мелкой воды (см., например, [10, с. 36]).

Обратим внимание на то, что краевое условие (18) в случае (20) выполнено с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^3)$.

Функция $p_0(S)$ определяет реакцию внешней среды на изменение (увеличение/уменьшение) размеров цилиндрической области. В принципе, уравнение состояния (26) может быть произвольным при условии, что $p_0'(S) > 0$. В случае, когда рассматривается течение крови, различные варианты зависимости $p_0(S)$ указаны, например, в [3–9]. Вариант $p_0 =$ const также допустим, однако, требует специального рассмотрения, так как приводит к существенным упрощениям.

3. Амплитудные уравнения для возмущений

Уравнения (24), (25), а также (27), (28) допускают очевидное решение

$$R(z,t) = R_0 = \mathrm{const}, \quad S(z,t) = S_0 = \mathrm{const}, \quad F(z,t) = W_0 = \mathrm{const}, \tag{29}$$

которое соответствует постоянному течению со скоростью W_0 в цилиндрической области постоянного радиуса R_0 (или постоянной площади сечения S_0). Решение (29) удовлетворяет всем краевым условиям (17), (18) на свободной (не возмущенной) границе.

Следуя, например, [12], построим амплитудные уравнения, описывающие конечные нелинейные возмущения решения (29) уравнений (24), (25), разыскивая функции $S = R^2$, F в виде

$$S(z,t) = S_0 + \varepsilon^2 H(z,t), \quad F(z,t) = W_0 + \varepsilon^2 \Phi(z,t), \tag{30}$$

где $H(z,t)$, $\Phi(z,t)$ — возмущения свободной границы и скорости (на границе).

Подставляя (30) в (24), (25) и сохраняя лишь члены порядка $O(\varepsilon^2)$, получим уравнения для конечных возмущений

$$H_t + W_0 H_z + S_0 \Phi_z + \varepsilon^2 G_1(H,\Phi) = 0, \tag{31}$$

$$\Phi_t + W_0 \Phi_z + p_0'(S_0) H_z + \varepsilon^2 G_2(H,\Phi) = 0, \tag{32}$$

$$G_1 = H_z \Phi + \Phi_z H - \frac{1}{8}\Phi_{zzz} S_0^2, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} G_2 = \frac{5H(\Phi_t + W_0\Phi_z)}{2S_0} - \frac{S_0(\Phi_{tzz} + W_0\Phi_{zzz})}{4} - \frac{(\Phi_{tz} + W_0\Phi_{zz})\sqrt{S_0}}{2} \\ +\mu_0 \Phi_{zz} + p_0''(S_0) H H_z + \Phi\Phi_z + \frac{\sigma_0 H_{zzz}}{2\sqrt{S_0}}. \end{gathered} \tag{34}$$

Используя формальную схему метода многомасштабных разложений, сделаем замену переменных

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T} - \lambda \frac{\partial}{\partial X}, \quad T = \varepsilon^2 t, \quad \frac{\partial}{\partial z} \to \frac{\partial}{\partial X}, \tag{35}$$

соответствующую масштабированию времени и переходу в систему координат, связанную с характеристикой линейной системы, $z = X - \lambda t$. Здесь X, T — новые координата и время.

Решение задачи (31)–(34) разыскиваем в виде

$$H(z,t) = H^0(X,T) + \varepsilon^2 H^1(X,T), \quad \Phi(z,t) = \Phi^0(X,T) + \varepsilon^2 \Phi^1(X,T). \tag{36}$$

Подчеркнем, что это именно формальная схема, так как в случае, когда λ является комплексной, переменная X также становится комплексной.

Использование (35), (36) преобразует уравнения (31)–(34) к виду (с точностью до $O(\varepsilon^2)$)

$$\begin{aligned} &\left(-\lambda H_X^0 + W_0 H_X^0 + S_0 \Phi_X^0\right) + \varepsilon^2 \left(-\lambda H_X^1 + W_0 H_X^1 + S_0 \Phi_X^1\right) \\ &\qquad + \varepsilon^2 H_T^0 + \varepsilon^2 G_1(H^0, \Phi^0) = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &\left(-\lambda \Phi_X^0 + W_0 \Phi_X^0 + p_0'(S_0) H_X^0\right) + \varepsilon^2 \left(-\lambda \Phi_X^1 + W_0 \Phi_X^1 + p_0'(S_0) H_X^1\right) \\ &\qquad + \varepsilon^2 \Phi_T^0 + \varepsilon^2 G_2(H^0, \Phi^0) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

В нулевом приближении, т. е. при $\varepsilon = 0$, для определения H^0, Φ^0 имеем линейную однородную систему

$$-\lambda H^0_X + W_0 H^0_X + S_0 \Phi^0_X = 0, \tag{39}$$

$$-\lambda \Phi^0_X + W_0 \Phi^0_X + p_0'(S_0) H^0_X = 0, \tag{40}$$

нетривиальное решение которой возможно, если для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} W_0 - \lambda & S_0 \\ p_0'(S_0) & W_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

определитель обращается в нуль

$$(W_0 - \lambda)^2 - S_0 p_0'(S_0) = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) позволяет определить λ (скорость распространения линейной волны)

$$\lambda = W_0 \mp \sqrt{S_0 p_0'(S_0)}. \tag{42}$$

Если λ выбрано в соответствии с (42), то уравнения системы (39), (40) линейно зависимы и, интегрируя, например, уравнение (39) по X, получим связь между Φ^0 и H^0:

$$\Phi^0 = \frac{\lambda - W_0}{S_0} H^0 = \mp \frac{\sqrt{S_0 p_0'(S_0)}}{S_0} H^0. \tag{43}$$

Таким образом, уравнения (37), (38) приобретают вид

$$-\lambda H^1_X + W_0 H^1_X + S_0 \Phi^1_X = -H^0_T - G_1(H^0, \Phi^0), \tag{44}$$

$$-\lambda \Phi^1_X + W_0 \Phi^1_X + p_0'(S_0) H^1_X = -\Phi^0_T - G_2(H^0, \Phi^0). \tag{45}$$

Система (44), (45) является неоднородной системой для определения H^1, Φ^1. Ввиду того, что матрица системы (матрица A) при выборе λ в виде (42) вырождена, для разрешимости уравнений требуется выполнение условия (разрешимости)

$$l_1\big(H^0_T + G_1\big(H^0, \Phi^0\big)\big) + l_2\big(\Phi^0_T + G_2\big(H^0, \Phi^0\big)\big) = 0,$$

где l_1, l_2 — компоненты левого собственного вектора матрицы A, например,

$$l_1 = \lambda - W_0, \quad l_2 = S_0. \tag{46}$$

С учетом соотношений (33), (34) и (42), (43), (46), имеем

$$H^0_T + k_1 H^0 H^0_X + k_2 H^0_{XX} + k_3 H^0_{XXX} = 0, \tag{47}$$

где

$$k_1 = \mp \frac{\sqrt{S_0 p_0'(S_0)}\big(- p_0'(S_0) + 2 S_0 p_0'(S_0) + 2 p_0''(S_0)\big)}{2 p_0'(S_0)(1 + S_0)}, \tag{48}$$

$$k_2 = \mp \frac{S_0\big(\mp 2\mu_0 + S_0 \sqrt{p_0'(S_0)}\big)}{2(1 + S_0)},$$

$$k_3 = \mp \frac{\sqrt{p_0'(S_0)}\Big(p_0'(S_0) S_0^{5/2} + 4\sigma_0\Big)}{8 p_0'(S_0)(1 + S_0)}.$$

Уравнение (47) и является искомым амплитудным уравнением (в данном случае для возмущений свободной поверхности). Уравнение хорошо известно как уравнение Кортевега-де Вриза — Бюргерса. Исследование такого уравнения, в том числе, применительно к течению крови, имеется, например, в [24–27].

4. Анализ результатов

Коэффициенты k_1, k_2, k_3 не содержат скорости W_0. Величина W_0, конечно, присутствует в λ, которая определяет скорость движения волны. Знаки коэффициентов зависят от знака скорости движения линейной волны λ. Знак коэффициента k_1 не играет решающего значения, так как очевидная замена преобразует уравнение (47) к виду

$$h_T + hh_X + k_2 h_{XX} + k_3 h_{XXX} = 0, \quad h = k_1 H^0. \tag{49}$$

Иными словами, от k_1 зависит лишь знак возмущений H^0 и Φ^0. Достаточно подробно поведение решения уравнения (49) исследовано в [26] (см. также монографию [27, с. 205–208], в которой, в частности, указаны точные решения). Обратим внимание на то, что даже в отсутствии вязкости ($\mu_0 = 0$) и поверхностного натяжения ($\sigma_0 = 0$) коэффициенты k_2 (диссипация, демпфирование) и k_3 (дисперсия) отличны от нуля. Иными словами, дисперсионные и демпфирующие эффекты обусловлены вовсе не обязательно вязкостью и поверхностным натяжением жидкости. Интересно также отметить, что при $2\mu_0 = S_0\sqrt{p_0'(S_0)}$ коэффициент $k_2 = 0$ (см. (48)), т. е. отсутствует демпфирование, и уравнение (49) превращается в обычное уравнение КдВ.

Приведем сравнение модели (27), (28) с моделью, полученной, в частности, в [1, 3–9] на основе метода осреднения, в которой вместо уравнения (28) предлагается использовать уравнение с поправочным коэффициентом $\alpha(z,t)$

$$\widetilde{W}_t + \left(\frac{1}{2}\alpha\widetilde{W}^2\right)_z + p_{0,z}(S) = 0, \tag{50}$$

где $\widetilde{W}(z,t)$ — среднее значение скорости.

Одна из самых важных проблем методов осреднения — замыкание уравнений, решается в [1, 3–9] крайне проблематично. При осреднении вводится поправочный коэффициент α:

$$\alpha(z,t) = \frac{2}{R^2(z,t)\widetilde{W}^2(z,t)} \int\limits_0^{R(z,t)} rw^2(r,z,t)\,dr, \tag{51}$$

$$\widetilde{W}(z,t) = \frac{2}{R^2(z,t)} \int\limits_0^{R(z,t)} rw(r,z,t)\,dr.$$

Необоснованно считается, что $\alpha = \mathrm{const}$, и численные исследования проводятся для $\alpha > 1$, хотя при аналитических исследованиях всегда полагается $\alpha = 1$.

Вычисление коэффициента α с использованием формулы (12) для осевой компоненты скорости $w(r,z,t)$ приводит к соотношениям

$$\widetilde{W} = F - \frac{\varepsilon^2 R^2 F_{zz}}{8} + O(\varepsilon^4), \quad \alpha = 1 + \frac{\varepsilon^4 R^2 F_{zz}}{192F^2} + O(\varepsilon^6).$$

Такой результат, с учетом того, что уравнение (50) является главным членом асимптотики (т. е. $\varepsilon = 0$), означает, что $\alpha \equiv 1$, по крайней мере, для безвихревого течения жидкости. Напомним, что при построении уравнений при помощи метода осреднения никаких предположений о безвихревом характере течения не делается.

Наконец, укажем, что соотношения (11), (12), естественно после определения функции $F(z,t)$, позволяют исследовать структуру течения внутри трубы, решая уравнения

$$\frac{dr}{dt} = u(r,z,t), \quad \frac{dz}{dt} = w(r,z,t) \tag{52}$$

или строя изолинии функции $\psi(r,z,t)$ (при фиксированных t), используя (10).

Заметим, что уравнения (52), записанные в виде

$$s_t = -2\psi_z, \quad z_t = 2\psi_s, \quad s = r^2, \tag{53}$$

имеют гамильтонову структуру (функция тока 2ψ является гамильтонианом).

Заключение

Математические модели, построенные в представленной работе — (i) аналог классических уравнений мелкой воды (уравнения (27), (28)), (ii) аналог уравнений Буссинеска (второе приближение теории мелкой воды, уравнения (24), (25)), (iii) амплитудное уравнение Кортевега-де Вриза — Бюргерса (47), позволяют более детально исследовать течения в трубах с податливыми стенками (кровеносных сосудах, струях). С математической точки зрения, вывод уравнений с использованием теории мелкой воды — построение решения в виде рядов (10)–(12) (хотя и формальных), по существу, является построением асимптотики по малому параметру ε^2. Модели (i)–(iii), фактически, являются уравнениями для определения главного и последующего членов асимптотики решения исходных уравнений (1)–(3). В отличие от метода осреднения, такой подход не требует дополнительных гипотез, возникающих при замыкании осредненых уравнений, например, предположения о постоянстве поправочного коэффициента α (см. (51)). Более того, соотношения (11), (12) позволяют при помощи решения уравнений (53) исследовать структуру течения внутри трубы, как это сделано, например, в работе [18], в которой решение подобных уравнений позволяет обнаружить тонкую структуру (вихри) в случае турбулентного течения в трубе. Заметим, что уравнения метода осреднения (27), (50), формально совпадающие с (27), (28) (при $\alpha = 1$), не позволяют по средним значениям определять вид функций $u(r,z,t)$, $w(r,z,t)$.

Полученные результаты могут использоваться для конструирования новых моделей путем задания, например, иных порядков параметров (см. (20)) или учета, скажем, вращения жидкости [28], а также уточнения имеющихся моделей течения крови (см., например, [20, 29–31]).

Литература

1. *Barnard A. C. L., Hunt W. A., Timlake W. P., Varley E.* A theory of fluid flow in compliant tubes // Biophysical Journal.—1966.—Vol. 6, № 6.—P. 717–724. DOI: 10.1016/S0006-3495(66)86690-0.
2. *Womersley J. R.* Oscillatory flow in arteries: the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission // Phys. Med. Biol.—1957.—Vol. 2, № 2.—P. 178–187. DOI: 10.1088/0031-9155/2/2/305.
3. *Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A.* Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis // Computing and Visualization in Science.—1999.—T. 2, № 2.—P. 75–83. DOI: 10.1007/s007910050030.
4. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics.—2003.—Vol. 47.—P. 251–276. DOI: 10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29.

5. *Canic S., Li T.* Critical thresholds in a quasilinear hyperbolic model of blood flow // Networks and Heterogeneous Media.—2009.—Vol. 4, № 3.—P. 527–536. DOI: 10.3934/nhm.2009.4.527.
6. *Canic S.* Blood flow through compliant vessels after endovascular repair: wall deformations induced by the discontinuous wall properties // Computing and Visualization in Science.—2002.—Vol. 4.—P. 147—155. DOI: 10.1007/s007910100066.
7. *Mikelic A., Guidoboni G., Canic S.* Fluid-structure interaction in a pre-stressed tube with thick elastic walls I: the stationary Stokes problem // Networks and Heterogeneous Media.—2007.—Vol. 2, № 3.—P. 397–423. DOI: 10.3934/nhm.2007.2.397.
8. *Acosta S., Puelz C., Reviere R., Penny D. J., Bready K. M., Rusin C. G.* Cardiovascular mechanics in the early stages of pulmonary hypertension: a computational study // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology.—2017.—Vol. 16.—P. 2093–2112. DOI: 10.1007/s10237-017-0940-4.
9. *Fernandez M. A., Milisic V., Quarteroni A.* Analysis of a geometrical multiscale blood flow model based on the coupling of ODE's and hyperbolic PDE'S [Research Report] RR-5127 // INRIA.—2004.—29 p.
10. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985.—319 с.
11. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973.—176 с.
12. *Gibbon J. D., McGuinness M. J.* Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical systems // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A, Mathematical and Physical Sciences.—1981.—Vol. 377, № 1769.—P. 185–219. DOI: 10.1098/rspa.1981.0121.
13. *Agrawal B., Mohd I. K.* Mathematical modeling of blood flow // International Journal of Statistics and Applied Mathematics.—2021.—Vol. 6, № 4.—P. 116–122.
14. *Labadin J., A. Ahmadi A.* Mathematical modeling of the arterial blood flow // Proceedings of the 2nd IMT-GT Regional Conference on Mathematics, Statistics and Applications.—University Sains Malaysia, Penang, 2006.—P. 222–226.
15. *Свиридова Н. В., Власенко В. Д.* Моделирование гемодинамических процессов сердечно-сосудистой системы на основе данных периферической артериальной пульсации // Мат. биология и биоинформатика.—2014.—Т. 9, № 1.—С. 195–205. DOI: 10.17537/2014.9.195.
16. *Астраханцева Е. В., Гидаспов В. Ю., Ревизников Д. Л.* Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов // Мат. моделирование.—2005.—Т. 17, № 8.—С. 61–80.
17. *Хмель Т. А., Федоров А. В.* Моделирование пульсирующих течений в кровеносных капиллярах // Мат. биология и биоинформатика.—2013.—Т. 8, № 1.—С. 1–11. DOI: 10.17537/2013.8.1.
18. *Жуков М. Ю., Полякова Н. М., Ширяева Е. В.* Квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Физ.-мат. науки.—2020.—№ 1.—С. 4–10. DOI: 10.18522/1026–2237-2020-1-4-10.
19. *Волобуев А. Н.* Течение жидкости в трубах с эластичными стенками // Успехи физических наук.—1995.—Т. 165, № 2.—С. 177–186. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199502c.0177.
20. *Piccioli F., Bertaglia G., Valiani A., Caleffi V.* Modeling blood flow in networks of viscoelastic vessels with the 1-D augmented fluid–structure interaction system // J. of Computational Physics.—2022.—Vol. 464.—Article 111364. DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111364.
21. *Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., Чернявский И. Л.* Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязко-эластичной трубке // Нелинейная динамика.—2008.—Т. 4, № 1.—С. 69–86. DOI: 10.20537/nd0801004.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / 4-е изд.—М.: Наука, 1986.—736 с.
23. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испарения капли жидкости.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—208 с.
24. *Самохин А. В. Дементьев Ю. И.* Моделирование уединенных волн уравнения КдВ-Бюргерса в диссипативно неоднородных средах // Научный вестн. МГТУ ГА.—2018.—Т. 21, № 2.—С. 114–121. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-114-121.
25. *Чернявский И. Л.* Математическое моделирование волновых процессов и ауторегуляции при течении крови в сосудах: Тез. дисс. ... к.ф.-м.н.—М.: РАН МИФИ, 2008.—135 с.
26. *Johnson R. S.* A non-linear equation incorporating damping and dispersion // Journal of Fluid Mechanics.—1970.—Vol. 42, № 1.—P. 49–60. DOI: 10.1017/S0022112070001064.
27. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.—М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.—360 с.
28. *Багаев С. Н., Захаров В. Н., Орлов В. А.* О необходимости винтового движения крови // Российский журнал биомеханики.—2002.—Т. 6, № 4.—С. 30–50.
29. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения.—М.: Мир, 1981.—624 с.

30. *Dinnar U.* Cardiovascular Fluid Dynamics.—CRCPress Taylor & Francis Group, 1981.—260 p. DOI: 10.1201/9780429284861.
31. *Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V.* Methods of blood flow modelling // Math. Model. Nat. Phenom.—2016.—Vol. 11, № 1.—P. 1–25. DOI: 10.1051/mmnp/201611101.

Статья поступила 18 июля 2022 г.

Жуков Михаил Юрьевич
Южный федеральный университет, ИММКН им. И. И. Воровича,
заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики, профессор
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: myzhukov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-2870-0397

Полякова Наталья Михайловна
Южный федеральный университет, ИММКН им. И. И. Воровича,
ассистент кафедры вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: nmzhukova@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-2779-2733

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 2, P. 89–102

ASYMPTOTIC MODELS OF FLOW IN A PIPE WITH COMPLIANT WALLS

Zhukov, M. Yu. [1,2] and Polyakova, N. M.[1]

[1] Southern Federal University, Vorovich IMMCS,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: myzhukov@sfedu.ru, nmzhukova@sfedu.ru

Abstract. For a rotationally symmetric vortex-free flow of a viscous incompressible fluid in a compliant tube based on the shallow water theory (Lagrangian approach), a nonlinear amplitude equation describing the behavior of finite perturbations in the vicinity of waves propagating along the characteristics is constructed. It is assumed that the flow occurs in an infinite cylindrical region having a free surface on which kinematic and dynamic conditions are satisfied, taking into account surface tension. The characteristic size of the cylindrical region in the axial direction is considered to be much larger than the characteristic size in the radial direction. It is found that in the case of the considered vortex-free flow (the Navier–Stokes equations), the flow equations do not contain terms that take into account viscosity (coincide with the equations of an ideal incompressible fluid — Euler equations). The influence of fluid viscosity is taken into account only due to the dynamic boundary condition at the boundary. The amplitude equation has the form of the Korteweg-de Vries–Burgers equation, the solution of which is well studied by analytical, asymptotic and numerical methods. The coefficients of the equation are calculated and, depending on their values, a qualitative analysis of the behavior of perturbations was carried out. The constructed amplitude equation and the quasi-linear hyperbolic equations arising in the process of construction as the main term of the asymptotics, as well as equations for finite perturbations, can be used to describe the flow of a fluid jet and/or blood flow in the aorta. In principle, both quasi-linear equations, and the amplitude equation, and equations for finite perturbations, obtained, as a rule, using the averaging method, are known and widely used, in particular, for modeling blood flow. However, when constructing well-known models using the averaging method, a large number of heuristic assumptions are used, often poorly substantiated. The method of constructing models proposed in the presented paper is mathematically more correct and does not contain any assumptions except for the requirement formulated in the problem statement about the vortex-free nature of the flow and the order of smallness of the parameters (viscosity, surface tension). In addition, a comparison of the obtained equations with the equations of the averaging method is given. From a mathematical point of view, the constructed flow models are equations for determining the main and subsequent terms of the asymptotics.

Keywords: Korteweg-de Vries–Burgers amplitude equation, quasi-linear hyperbolic equations, vortex-free flow of incompressible fluid, asymptotic expansions.

AMS Subject Classification: 76D05, 35B20, 35C20, 35L40, 35C10.

For citation: *Zhukov, M. Yu. and Polyakova, N. M.* Asymptotic Models of Flow in a Pipe with Compliant Walls // *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 89–102 (in Russian). DOI: 10.46698/i3568-6388-7809-u.

References

1. *Barnard, A. C. L. , Hunt, W. A., Timlake, W. P. and Varley, E.* A Theory of Fluid Flow in Compliant Tubes, *Biophysical Journal*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 717–724. DOI: 10.1016/S0006-3495(66)86690-0.
2. *Womersley, J. R.* Oscillatory Flow in Arteries: the Constrained Elastic Tube as a Model of Arterial Flow and Pulse Transmission, *Physics in Medicine* & *Biology*, 1957, vol. 2, no. 2, pp. 178–187. DOI: 10.1088/0031-9155/2/2/305.
3. *Formaggia, L., Nobile, F., Quarteroni, A. and Veneziani, A.* Multiscale Modelling of the Circulatory System: a Preliminary Analysis, *Computing and Visualization in Science*, 1999, vol. 2, no. 2, pp. 75–83. DOI: 10.1007/s007910050030.
4. *Formaggia, L., Lamponi, D. and Quarteroni, A.* One-Dimensional Models for Blood Flow in Arteries, *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, vol. 47, pp. 251–276. DOI: 10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29.
5. *Canic, S. and Li, T.* Critical Thresholds in a Quasilinear Hyperbolic Model of Blood Flow, *Networks and Heterogeneous Media*, 2009, vol. 4, no. 3, pp. 527–536. DOI: 10.3934/nhm.2009.4.527.
6. *Canic, S.* Blood Flow Through Compliant Vessels After Endovascular Repair: Wall Deformations Induced by the Discontinuous Wall Properties, *Computing and Visualization in Science*, 2002, vol. 4, pp. 147–155. DOI: 10.1007/s007910100066.
7. *Mikelic, A., Guidoboni, G. and Canic, S.* Fluid-Structure Interaction in a Pre-Stressed Tube with Thick Elastic Walls I: The Stationary Stokes Problem, *Networks and Heterogeneous Media*, 2007, vol. 2, no. 3, pp. 397–423. DOI: 10.3934/nhm.2007.2.397.
8. *Acosta, S., Puelz, C., Reviere, R., Penny, D. J. Bready, K. M. and Rusin, C. G.* Cardiovascular Mechanics in the Early Stages of Pulmonary Hypertension: a Computational Study, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2017, vol. 16, pp. 2093–2112. DOI: 10.1007/s10237-017-0940-4.
9. *Fernandez, M. A., Milisic, V. and Quarteroni, A.* Analysis of a Geometrical Multiscale Blood Flow Model Based on the Coupling of ODE's and Hyperbolic PDE'S [Research Report] RR-5127, *INRIA*, 2004, 29 p.
10. *Ovsyannikov, L. V., Makarenko, N. I., Nalimov, V. I. etc. Nelineynye problemy teorii poverkhnostnykh i vnutrennikh voln* [Nonlinear Problems of Theoretical and Internal Waves], Novosibirsk, Nauka, 1985, 319 p. (in Russian).
11. *Karpman, V. I. Nelineynye volny v dispergiruyushchikh sredakh* [Nonlinear Waves in Dispersive Media], Moscow, Nauka, 1973, 176 p. (in Russian).
12. *Gibbon, J. D. and McGuinness, M. J.* Amplitude Equations at the Critical Points of Unstable Dispersive Physical Systems, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1981, vol. 377, no. 1769, pp. 185–219. DOI: 10.1098/rspa.1981.0121.
13. *Agrawal, B. and Mohd, I. K.* Mathematical Modeling of Blood Flow, *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*, 2021, vol. 6, no. 4, pp. 116–122.
14. *Labadin, J. and A. Ahmadi, A.* Mathematical Modeling of the Arterial Blood Flow, *Proceedings of the 2nd IMT-GT Regional Conference on Mathematics, Statistics and Applications*, Penang, University Sains Malaysia, 2006, pp. 222–226.
15. *Sviridova, N. V. and Vlasenko, V. D.* Modeling of Hemodynamic Processes of the Cardiovascular System Based on Peripheral Arterial Pulsation Data, *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika* [Mathematical Biology and Bioinformatics], 2014, vol. 9, no. 1, pp. 195–205 (in Russian). DOI: 10.17537/2014.9.195.
16. *Astrakhantseva, E. V., Gidaspov, V. Yu. and Reviznikov, D. L.* Mathematical Modeling of Hemodynamics of Large Blood Vessels, *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2005, vol. 17, no. 8, pp. 61–80 (in Russian).
17. *Khmel', T. A. and Fedorov, A. V.* Simulation of Pulsating Flows in Blood Capillaries, *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika* [Mathematical Biology and Bioinformatics], 2013, vol. 8, no. 1, pp. 1—11 (in Russian). DOI: 10.17537/2013.8.1.

18. *Zhukov, M. Yu., Polyakova, N. M. and Shiryaeva, E. V.* Quasi-Stationary Turbulent Flow in Cylinder Channel with Irregular Walls, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy Region. Estestvennye Nauki. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences. Physical and Mathematical Sciences], 2020, vol. 1, pp. 4–10 (in Russian). DOI: 10.18522/1026–2237-2020-1-4-10.
19. *Volobuev, A. N.* Fluid Flow in Pipes with Elastic Walls, *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in the Physical Sciences], 1995, vol. 165, no. 2, pp. 177–186 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0165.199502c.0177.
20. *Piccioli, F., Bertaglia, G., Valiani, A. and Caleffi, V.* Modeling Blood Flow in Networks of Viscoelastic Vessels with the 1-D Augmented Fluid–Structure Interaction System, *Journal of Computational Physics*, 2022, vol. 464, article 111364. DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111364.
21. *Kudryashov, N. A., Sinel'shchikov, D. I. and Chernyavskiy, I. L.* Nonlinear Evolution Equations for Description of Perturbations in a Viscoelastic Tube, *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2008, vol. 4, no. 1, pp. 69–86 (in Russian). DOI: 10.20537/nd0801004.
22. *Landau, L. D. and Lifshits, E. M. Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika. 4-e izd.* [Theoretical Physics. Vol. VI. Hydrodynamics.-4th ed.], Moscow, Nauka, 1986, 736 p. (in Russian).
23. *Zhukov, M. Yu., Shiryaeva, E. V. and Polyakova, N. M. Modelirovanie ispareniya kapli zhidkosti* [Modeling the Evaporation of a Liquid Drop], Rostov-on-Don, Southern Federal University Press, 2015, 208 p. (in Russian).
24. *Samokhin, A. V. and Dement'ev, Yu. I.* Simulation of Solitary Waves of the KdV–Burgers Equation in Dissipatively Inhomogeneous Media, *Nauchnyy vestnik MGTU GA* [Civil Aviation High Technologies], 2018, vol. 21, no. 2, pp. 114–121 (in Russian). DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-114-121.
25. *Chernyavskiy, I. L. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov i autoregulyatsii pri techenii krovi v sosudakh: Tezisy dissertatsii* [Mathematical Modeling of Wave Processes and Autoregulation During Blood Flow in Vessels: Dissertation Thesis], Moscow, RAS MEPhI, 2008, 135 p. (in Russian).
26. *Johnson, R. S.* A Non-Linear Equation Incorporating Damping and Dispersion, *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, vol. 42, no. 1, pp. 49–60. DOI: 10.1017/S0022112070001064.
27. *Kudryashov, N. A. Analiticheskaya teoriya nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Analytic Theory of Nonlinear Differential Equations], Moscow–Izhevsk, Institute of Computer Research, 2004, 360 p. (in Russian).
28. *Bagaev, S. N.,Zakharov, V. N. and Orlov, V. A.* On the Necessity of the Helical Movement of Blood, *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2002, vol. 6, no. 4, pp. 30–50 (in Russian).
29. *Karo, K., Pedli, T., Shroter, R. and Sid, U. Mekhanika krovoobrashcheniya* [Mechanics of Blood Circulation], Moscow, Mir, 1981, 624 p. (in Russian).
30. *Dinnar, U. Cardiovascular Fluid Dynamics*, New York, CRCPress Taylor & Francis Group, 1981, 252 p. DOI: 10.1201/9780429284861.
31. *Bessonov, N., Sequeira, A., Simakov, S., Vassilevskii, Yu. and Volpert, V.* Methods of Blood Flow Modelling, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 1–25. DOI: 10.1051/mmnp/201611101.

Received Jule 18, 2022

Michael Yu. Zhukov
Southern Federal University, Vorovich IMMCS,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of Department of Mathematics and Mathematical Physics, Professor;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `myzhukov@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0002-2870-0397

Natalia M. Polyakova
Southern Federal University, Vorovich IMMCS,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Assistent of Department of Mathematics and Mathematical Physics
E-mail: `nmzhukova@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2779-2733