Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 44–53

УДК 514.517.926
DOI 10.46698/u7680-5193-0172-d

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Кыров[1], **Г. Г. Михайличенко**

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1

E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`, `mikhailichenko@gasu.ru`

Аннотация. Установление возможности вложения неаддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии ранга $(2, 2)$ с функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2)$ в двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга $(3, 2)$ с функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2)$ приводит к задаче нахождения у соответствующей системы $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu)$ двух функциональных уравнений невырожденных решений. Данная система решается, поскольку функции g и f ранее известны. Тогда эта система принимает явный вид: $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu)$, $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu)$. Общее решение такой системы найти трудно, однако можно сначала найти каноническое решение, связанное с жордановой формой матриц второго порядка, поскольку их количество мало, а затем по нему определить общее решение с помощью подходящего невырожденного преобразования матриц и векторов. Такая переформулировка основной проблемы делает ее более простой и интересной в математическом смысле. В процессе поиска канонических решений исходной системы функциональных уравнений сначала дифференцируем по переменным x и ξ, в результате получаем систему дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов A общего вида: $\begin{pmatrix} \bar{x}_x \\ \bar{y}_x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. Доказывается, что матрицу A можно привести к жорданову виду. Затем решается система дифференциальных уравнений с такой жордановой матрицей. Далее, с решениями системы дифференциальных уравнений возвращается в исходную систему функциональных уравнений, откуда находятся дополнительные ограничения. В итоге получаются невырожденные канонические решения исходной системы функциональных уравнений. По этим каноническим решениям затем записывается общие решения исходной системы.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, Жорданова форма матрицы, система функциональных уравнений, система дифференциальных уравнений.

AMS Subject Classification: 51K99, 34K99.

Образец цитирования: *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 44–53. DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

1. Введение

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n + 1, 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, задается на двумерном и $2n$-мерном дифференцируемых многообразиях M и N дифференцируемой функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M \times N \to R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1, 2]. Координатное представление для этой функции $f = (f^1, f^2)$:

$$f = f(x, y, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n}),$$

где (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n})$ — локальные координаты в многообразиях M и N соответственно.

© 2022 Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.

Дополнительно выполняются следующие естественные аксиомы:

Аксиома 1. *Координатное представление функции f невырождено относительно двух координат x, y и $2n$ координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n}$.*

Невырожденность функции f в ее координатном представлении выражается необращением в нуль якобианов:

$$\frac{\partial(f^1(i,\alpha), f^2(i,\alpha))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial(f^1(i_1,\alpha), f^2(i_1,\alpha), \ldots, f^1(i_n,\alpha), f^2(i_n,\alpha))}{\partial(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \ldots, \xi^{2n}_\alpha)} \neq 0,$$

где $(x_i,\, y_i)$ — координаты точки i, а $(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \ldots, \xi^{2n}_\alpha)$ — координаты точки α.

Аксиома 2. *Для плотного и открытого множества точек $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением*

$$\Phi\big(f^1(i_1,\alpha_1), f^2(i_1,\alpha_1), \ldots, f^1(i_{n+1},\alpha_2), f^2(i_{n+1},\alpha_2)\big) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — двухкомпонентная функция $4(n+1)$ переменных с $\operatorname{rang}\Phi = 2$.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств появились в теории физических структур, разработанной Ю. И. Кулаковым и Г. Г. Михайличенко [3, 4]. Классификация этих геометрий функциональным методом получена вторым соавтором и ее можно найти в работах [1, 2, 5, 6]. С точностью до замены координат в многообразиях и преобразования $\chi(f) \to f$ она содержит следующие геометрии:
для $n = 1$:

$$f^1 = x + \xi, \quad f^2 = y + \eta;$$
$$f^1 = (x+\xi)y, \quad f^2 = (x+\xi)\eta;$$

для n=2:

$$f^1 = x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2, \quad \varepsilon = -1, 0, 1;$$
$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y(\xi^1)^\gamma + \nu, \quad \gamma \neq 1;$$
$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\xi^2 + x^2(\xi^1)^2 \ln \xi^1 + \eta^2;$$
$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2;$$

для $n = 3$:

$$f^1 = \frac{\left(x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2\right)\left(x + \xi^3\right) - \varepsilon\left(x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2\right)\left(y + \eta^3\right)}{(x+\xi^3)^2 - \varepsilon(y+\eta^3)^2},$$

$$f^2 = \frac{\left(x\xi^1 + \varepsilon y\eta^1 + \xi^2\right)\left(y + \eta^3\right) - \left(x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2\right)\left(x + \xi^3\right)}{(x+\xi^3)^2 - \varepsilon(y+\eta^3)^2};$$

$$f^1 = \frac{x\xi^1 + \xi^2}{x + \xi^3}, \quad f^2 = \frac{x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3}{x + \xi^3};$$

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3;$$

для $n = 4$:

$$f^1 = \frac{x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3}{x\xi^4 + y + \eta^4}, \quad f^2 = \frac{x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3}{x\xi^4 + y + \eta^4};$$

для $n > 4$ двухкомпонентная невырожденная функция $f = (f^1, f^2)$ не существует.

Методом вложения авторами была получена классификация ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ [7]. Геометрическое изучение таких геметрий предпринималось первым соавторов в статье [8].

Пусть функция $g = \left(g^1, g^2\right) = g(x, y; \xi^1, \ldots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(x', y'; \eta^1, \ldots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение [5]. Будем говорить, что *ДФС ГДМ ранга* $(n+1, 2)$ *вложена в ДФС ГДМ ранга* $(n+2, 2)$, если выполняется функциональное соотношение

$$f\left(x', y'; \eta^1, \ldots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}\right) = \chi\left(g\left(x, y; \xi^1, \ldots, \xi^{2n}\right), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right),$$

где χ, $x' = \lambda^1(x, y)$, $y' = \lambda^2(x, y)$, $\eta^1 = \tau^1\left(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right), \ldots$, $\eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}\left(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right)$, $\eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ — дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства

$$\Delta = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \Box = \frac{\partial(\eta^1, \ldots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \ldots, \xi^{2n+2})} \neq 0.$$

В работе [5] доказано, что *в каждую ДФС ГДМ ранга* $(n+2, 2)$ *вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга* $(n+1, 2)$, *где* $n = 1, 2, 3$.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений неаддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$g^1 = (x + \xi)y, \quad g^2 = (x + \xi)\eta$$

в мультипликативную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu.$$

Решение этой задачи сводится к решению системы функциональных уравнений.

Ранее в работе [9] была решена подобная задача о вложении аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$g^1 = x + \xi, \quad g^2 = y + \eta$$

в мультипликативную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu.$$

В последующем изложении используются более удобные обозначения для координат и функций.

2. Постановка задачи

Выше сформулированная задача нахождения всех вложений неаддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с двухкомпонентной функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = ((x+\xi)y, (x+\xi)\eta)$ (эта запись означает, что $g^1 = (x + \xi)y$, $g^2 = (x + \xi)\eta$) в мультипликативную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с двухкомпонентной функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + y\mu, x\eta + y\nu)$ сводится к решению системы двух функциональных уравнений

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu), \quad \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^2((x + \xi)y, (x + \xi)\eta, \mu, \nu), \tag{1}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$.

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \qquad \Box = \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu})}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu)} \neq 0. \tag{2}$$

Далее находим невырожденные решения системы (1).

Переменные x и ξ в правые части уравнений системы (1) входят суммой $x+\xi$. Поэтому производные их левых частей по этим переменным совпадают:

$$\bar{x}_x\bar{\xi} + \bar{y}_x\bar{\mu} = \bar{x}\bar{\xi}_\xi + \bar{y}\bar{\mu}_\xi, \quad \bar{x}_x\bar{\eta} + \bar{y}_x\bar{\nu} = \bar{x}\bar{\eta}_\xi + \bar{y}\bar{\nu}_\xi. \tag{3}$$

Дифференциальные равенства (3) можно по методу Крамера однозначно разрешить относительно производных $\bar{x}_x$ и $\bar{y}_x$, так как $\bar{\xi}\bar{\nu} - \bar{\eta}\bar{\mu} \neq 0$ согласно второму из условий (2). Фиксируя затем переменные ξ, η, μ, ν, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ по первой переменной x:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_x \\ \bar{y}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

в которой матрица A по первому из условий (2) ненулевая.

Произведем допустимое структурой функциональных уравнений системы (1) преобразование

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \to \left(U^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} \to \left(U^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} \tag{5}$$

с невырожденной матрицей U второго порядка.

Система дифференциальных уравнений (4) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_x \\ \bar{y}_x \end{pmatrix} = UAU^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно (см. [10, с. 485], [11]), что ненулевая матрица A второго порядка с вещественными элементами преобразованием $A \to UAU^{-1}$ может быть приведена к одной из четырех вещественных форм:

$$1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где в том же порядке: 1) $a \neq 0$, 2) a — любое, 3) $a \neq d$, 4) $b \neq 0$. Решения системы уравнений (4), связанные с формулами (6), будут следующими:

$$1)\ \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{ax}; \tag{7}$$

$$2)\ \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax}, \quad \bar{y} = (\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))e^{ax}; \tag{8}$$

$$3)\ \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{dx}; \tag{9}$$

$$4)\ \bar{x} = (\bar{x}(y)\sin bx + \bar{y}(y)\cos bx)e^{ax}, \quad \bar{y} = (\bar{x}(y)\cos bx - \bar{y}(y)\sin bx)e^{ax}, \tag{10}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, а коэффициенты обозначены $\bar{x}(y)$, $\bar{y}(y)$. Данный способ обозначений взят с целью экономии символов и используется везде ниже. Решения (7)–(10) системы (4) дифференциальных уравнений для жордановых форм (6) назовем *каноническими*, как и соответствующие им решения системы (1) функциональных уравнений, частью которых они являются. Любое другое решение системы (4) может быть получено из решений (7)–(10) с помощью преобразований (5).

3. Первый случай

Выражения (7) для функций $\bar{x}$ и $\bar{y}$ подставим в первое из равенств (3), продифференцировав его затем по переменной y и сокращая на e^{ax}:

$$\bar{x}(y)(\bar{\xi}_\xi - a\xi) + \bar{y}(y)(\bar{\mu}_\xi - a\mu) = 0, \quad \bar{x}'(y)(\bar{\xi}_\xi - a\xi) + \bar{y}'(y)(\bar{\mu}_\xi - a\mu) = 0. \tag{11}$$

По первому из условий (2) имеем $\bar{x}(y)\bar{y}'(y) - \bar{x}'(y)\bar{y}(y) \neq 0$, откуда, следуя Крамеру, из соотношений (11) получаем систему уравнений $\bar{\xi}_\xi - a\xi = 0$, $\bar{\mu}_\xi - a\mu$ со следующим решением:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}. \tag{12}$$

Выражения (7) и решение (12) подставим в первое функциональное уравнение системы (1):

$$\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big)e^{a(x+\xi)} = \chi^1\big((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu\big),$$

после чего дифференцируем его по переменным $x+\xi$, y, η:

$$\begin{aligned} a\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big)e^{a(x+\xi)} &= y\chi^1_u + \eta\chi^1_v, \\ \big(\bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}'(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big)e^{a(x+\xi)} &= (x+\xi)\chi^1_u, \\ \big(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta(\eta, \mu, \nu)\big)e^{a(x+\xi)} &= (x+\xi)\chi^1_v, \end{aligned}$$

где $u = (x+\xi)y$, $v = (x+\xi)\eta$. Результаты дифференцирования подставим в очевидное равенство

$$(x+\xi)(y\chi^1_u + \eta\chi^1_v) = y(x+\xi)\chi^1_u + \eta(x+\xi)\chi^1_v, \tag{13}$$

сокращая общий ненулевой множитель $e^{a(x+\xi)}$:

$$\begin{aligned} &(x+\xi)a\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big) \\ &\quad = y\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}'(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big) + \eta\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta(\eta, \mu, \nu)\big), \end{aligned}$$

откуда для функций $\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)$ и $\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)$ получаем систему уравнений

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = 0, \quad \bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}'(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = 0,$$

которая по Крамеру имеет только нулевое решение, что несовместимо со вторым из условий (2), так как $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} = 0$ и $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} = 0$.

4. Второй случай

В первое из равенств (3) подставим теперь выражения (8), сокращая его на e^{ax}:

$$a\bar{x}(y)\bar{\xi} + \big(\bar{x}(y) + a(\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\big)\bar{\mu} = \bar{x}(y)\bar{\xi}_\xi + (\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\bar{\mu}_\xi,$$

откуда получаем систему уравнений $\bar{\xi}_\xi = a\bar{\xi} + \bar{\mu}$, $\bar{\mu}_\xi = a\bar{\mu}$ со следующим решением:

$$\bar{\xi} = \big(\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\xi\big)e^{a\xi}, \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}. \tag{14}$$

Выражения (8) и решение (14) подставим в первое функциональное уравнение системы (1):

$$\big(\bar{x}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)(x+\xi) + \bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)\big)e^{a(x+\xi)} = \chi^1\big((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu\big),$$

дифференцируя его, как и выше, по переменным $x+\xi$, y, η:

$$\big(\bar{x}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)+a((\bar{x}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)(x+\xi)+\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)+\bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)))\big)e^{a(x+\xi)}=y\chi^1_u+\eta\chi^1_v,$$

$$\big(\bar{x}'(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)(x+\xi)+\bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)+\bar{y}'(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)\big)e^{a(x+\xi)}=(x+\xi)\chi^1_u,$$

$$\big(\bar{x}(y)\bar{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu)(x+\xi)+\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta(\eta,\mu,\nu)+\bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu)\big)e^{a(x+\xi)}=(x+\xi)\chi^1_v.$$

Результаты дифференцирования связаны очевидным соотношением (13), откуда получаем, что $a=0$, а также после разделения переменных систему уравнений $y\bar{x}'(y)=b\bar{x}(y)$, $y\bar{y}'(y)+(1-b)\bar{y}(y)+c\bar{x}(y)=0$, $\eta\bar{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu)=(1-b)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)$, $\eta\bar{\xi}_\eta(\eta,\mu,\nu)+b\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)-c\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)=0$ со следующим решением:

$$\begin{gathered}\bar{x}(y)=c_1y^b,\quad \bar{y}(y)=c_2y^{b-1}-cc_1y^b,\\ \bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)=\bar{\xi}(\mu,\nu)\eta^{-b}+c\bar{\mu}(\mu,\nu)\eta^{1-b},\quad \bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)=\bar{\mu}(\mu,\nu)\eta^{1-b}.\end{gathered}\tag{15}$$

Заметим, что при подстановке выражений (8) во второе из равенств (3), а последующих результатов во второе уравнение системы (1), для функций $\bar{\eta}$, $\bar{\nu}$ получим выражения, аналогичные выражениям $\bar{\xi}$, $\bar{\mu}$ в формулах (15).

В совокупности функции (8), (14) при $a=0$ и (15), с учетом сделанного выше замечания, определяют некоторое невырожденное каноническое решение системы функциональных уравнений (1):

$$\begin{gathered}\bar{x}=c_1y^b,\quad \bar{y}=c_1(x-c)y^b+c_2y^{b-1},\\ \bar{\xi}=\bar{\mu}(\mu,\nu)(\xi+c)\eta^{1-b}+\bar{\xi}(\mu,\nu)\eta^{-b},\quad \bar{\eta}=\bar{\nu}(\mu,\nu)(\xi+c)\eta^{1-b}+\bar{\eta}(\mu,\nu)\eta^{-b},\\ \bar{\mu}=\bar{\mu}(\mu,\nu)\eta^{1-b},\quad \bar{\nu}=\bar{\nu}(\mu,\nu)\eta^{1-b},\end{gathered}\tag{16}$$

где $b\neq 0$, $c_1\neq 0$.

5. Третий случай

Подставим, далее, в первое из равенств (3) выражения (9):

$$a\bar{x}(y)e^{ax}\bar{\xi}+d\bar{y}(y)e^{dy}\bar{\mu}=\bar{x}(y)e^{ax}\bar{\xi}_\xi+\bar{y}(y)e^{dy}\bar{\mu}_\xi,$$

откуда получаем систему уравнений $\bar{\xi}_\xi=a\xi$, $\bar{\mu}_\xi=d\mu$ со следующим решением:

$$\bar{\xi}=\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)e^{a\xi},\quad \bar{\mu}=\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)e^{d\xi}.\tag{17}$$

Выражение (9) и решение (17) подставим в первое уравнение системы (1)

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)e^{a(x+\xi)}+\bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)e^{d(x+\xi)}=\chi^1((x+\xi)y,(x+\xi)\eta,\mu,\nu),$$

которое затем продифференцируем по переменным $x+\xi$, y, η:

$$\begin{gathered}a\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)e^{a(x+\xi)}+d\bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)e^{d(x+\xi)}=y\chi^1_u+\eta\chi^1_v,\\ \bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)e^{a(x+\xi)}+\bar{y}'(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)e^{d(x+\xi)}=(x+\xi)\chi^1_u,\\ \bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta(\eta,\mu,\nu)e^{a(x+\xi)}+\bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu)e^{d(x+\xi)}=(x+\xi)\chi^1_v,\end{gathered}$$

где, напомним, $u=(x+\xi)y$, $v=(x+\xi)\eta$. По соотношению (13), которым связаны результаты дифференцирования, легко установить, что $a=0$ и $d=0$, но это несовместимо с условием $a\neq d$ в выражениях (9).

6. Четвертый случай

В первое из равенств (3) подставим последнее выражение (10) для функций $\bar{x}$ и $\bar{y}$, производя сокращение на e^{ax},

$$(b\bar{x}(y)+a\bar{y}(y))\cos bx+(a\bar{x}(y)-b\bar{y}(y))\sin bx)\bar{\xi}$$
$$+((a\bar{x}(y)-b\bar{y}(y))\cos bx-(b\bar{x}(y)+a\bar{y}(y))\sin bx)\bar{\mu}$$
$$=(\bar{x}(y)\sin bx+\bar{y}(y)\cos bx)\bar{\xi}_\xi+(\bar{x}(y)\cos bx-\bar{y}(y)\sin bx)\bar{\mu}_\xi,$$

откуда получаем систему уравнений $\bar{\xi}_\xi=a\bar{\xi}-b\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_\xi=b\bar{\xi}+a\bar{\mu}$ со следующим решением:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=\left(-\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)\sin b\xi+\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)\cos b\xi\right)e^{a\xi},\\ \bar{\mu}&=\left(\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)\cos b\xi+\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)\sin b\xi\right)e^{a\xi}.\end{aligned}\tag{18}$$

Выражения (10) и решение (18) подставим в первое уравнение системы (1):

$$\left[(\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)+\bar{y}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu))\cos b(x+\xi)\right.$$
$$\left.+(\bar{x}(y)\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)-\bar{y}(y)\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu))\sin b(x+\xi)\right]e^{a(x+\xi)}$$
$$=\chi^1((x+\xi)y,(x+\xi)\eta,\mu,\nu),$$

которое затем, как и в предыдущих случаях, продифференцируем по переменным $x+\xi$, y, η.

Результаты дифференцирования удовлетворяют, как и раньше очевидному тождеству (13), в левой части которого после сокращения общего ненулевого множителя $e^{a(x+\xi)}$ есть слагаемые содержащие выражения $(x+\xi)\sin b(x+\xi)$ и $(x+\xi)\cos b(x+\xi)$, а в правой его части таких слагаемых нет. Поэтому в левой части последнего тождества соответствующие коэффициенты при этих выражениях необходимо обращаются в нуль:

$$\begin{aligned}&\bar{x}(y)(a\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)-b\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu))-\bar{y}(y)(a\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)+b\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu))=0,\\ &\bar{x}(y)(a\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu)+b\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu))+\bar{y}(y)(a\bar{\mu}(\eta,\mu,\nu)-b\bar{\xi}(\eta,\mu,\nu))=0.\end{aligned}\tag{19}$$

Относительно функций $\bar{x}(y)$ и $\bar{y}(y)$ соотношения (19) образуют алгебраическую систему двух однородных уравнений, определитель матрицы которой, равный $(a^2+b^2)(\bar{\xi}^2(\eta,\mu,\nu)+\bar{\mu}^2(\eta,\mu,\nu))$, отличен от нуля вследствие второго условия из (18) и отличия от нуля константы b. Такая система по Крамеру имеет только нулевое решение: $\bar{x}(y)=0$, $\bar{y}(y)=0$, но тогда функции $\bar{x}$ и $\bar{y}$, задаваемые выражениями (10), также обращаются в нуль, делая невозможным выполнение первого из условий (2), а именно $\Delta=\partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(x,y)\neq 0$. Т. е. система (1) с функциями (10) не имеет невырожденного канонического решения.

7. Итоговая теорема

Таким образом, невырожденное каноническое решение (16) для системы (1) оказывается единственно возможным, а его общее решение может быть получено из канонического с помощью унимодулярного преобразования (5).

Теорема. *Общее невырожденное решение системы* (1) *двух функциональных уравнений может быть представлено следующей совокупностью шести функций:*

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1y^b\\ c_1(x-c)y^b+c_2y^{b-1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mu}(\mu,\nu)(\xi+c)\eta^{1-b} + \bar{\xi}(\mu,\nu)\eta^{-b} \\ \bar{\mu}(\mu,\nu)\eta^{1-b} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}(\mu,\nu)(\xi+c)\eta^{1-b} + \bar{\eta}(\mu,\nu)\eta^{-b} \\ \bar{\nu}(\mu,\nu)\eta^{1-b} \end{pmatrix},$$

где $b \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *причем*

$$\chi^1 = c_1(\bar{\xi}(\mu,\nu) + \bar{\mu}(\mu,\nu)(x+\xi)\eta)\left(\frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)\eta}\right)^b + c_2\bar{\mu}(\mu,\nu)\left(\frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)\eta}\right)^{b-1},$$

$$\chi^2 = c_1(\bar{\eta}(\mu,\nu) + \bar{\nu}(\mu,\nu)(x+\xi)\eta)\left(\frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)\eta}\right)^b + c_2\bar{\nu}(\mu,\nu)\left(\frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)\eta}\right)^{b-1}.$$

Заключение

Сформулированная выше задача вложения полностью решена. Найдено общее решение, частный случай которого (при $b = 1$) приводится в работе [5]. Заметим, что можно также сформулировать и решить задачу вложения и для других вариантов геометрий двух множеств, например, для ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\xi^1 + \eta^2,$$

в ДФС ГДМ ранга $(4, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3.$$

Литература

1. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур.—Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.—203 с.
2. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические феноменологические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 132–143.
3. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн.—1971.—Т. 12 № 5.—С. 1142–1145.
4. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 206, № 5.—С. 1056–1058.
5. *Кыров В. А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.—2018.—№ 56.—С. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/56/1.
6. *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М.* Последовательное по рангу $(n+1, 2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Изв. вузов. Матем.—2020.—№ 6.—С. 9–14. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-9-14.
7. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(2, 2)$ в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(3, 2)$ // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2018.—Т. 28, № 1.—С. 305–327. DOI: 10.20537/vm180304.
8. *Кыров В. А.* Двуметрические пространства // Изв. вузов. Матем.—2005.—№ 8.—С. 27–38.
9. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // Изв. вузов. Матем.—2021.—№ 8.—С. 46–55. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-8-46-55.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—495 с.
11. *Murnaghan F. D., Wintner A.* A canonical form for real matrices under orthogonal transformations // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.—1931.—Vol. 17.—P. 417–420. DOI: 10.1073/pnas.17.7.417.

Статья поступила 15 июля 2021 г.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет,
доцент кафедры математики, физики и информатики
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: kyrovVA@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 44–53

NONDEGENERATE CANONICAL SOLUTIONS OF A CERTAIN SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Kyrov, V. A.[1] and Mikhailichenko, G. G.

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia
E-mail: kyrovVA@yandex.ru, mikhailichenko@gasu.ru

Abstract. The problem of embedding a non-additive two-metric phenomenologically symmetric geometry of rank $(2, 2)$ with the function $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2)$ into a two-metric phenomenologically symmetric geometry of rank $(3, 2)$ with the function $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2)$ leads to the existence problem of nondegenerate solutions for corresponding system $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu)$ of two functional equations. This system is solvable since the functions g and f are previously known and hence the system takes an explicit form: $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu)$, $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^2((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu)$. It is difficult to find a general solution to such a system. However, one can first find a canonical solution associated with the Jordan form of second-order matrices, since their number is small, and then determine the general solution using an appropriate transformation of matrices and vectors. This reformulation of the main problem makes it simpler and mathematically more interesting. In the process of searching for canonical solutions of the original system of functional equations, we first differentiate with respect to the variables x and ξ, as a result, we obtain a system of differential equations with a matrix of coefficients A of general form: $\begin{pmatrix} \bar{x}_x \\ \bar{y}_x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. The matrix A can be reduced to Jordan form and then the system of differential equations with such a Jordan matrix is solved. Further, with the solutions of the system of differential equations, we return to the original system of functional equations, from which additional constraints are found. As a result, nondegenerate canonical solutions of the original system of functional equations are obtained. These canonical solutions are then used to write down the general solutions of the original system.

Key words: geometry of two sets, Jordan form of a matrix, system of functional equations, system of differential equations.

AMS Subject Classification: 51K99, 34K99.

For citation: *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Nondegenerate Canonical Solutions of a Certain System of Functional Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 44–53 (in Russian). DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

References

1. *Mikhailichenko, G. G. Gruppovaya simmetriya fizicheskih struktur* [Group Symmetry of Physical Structures], Barnaul, BGPU, 2003, 203 p. (in Russian).
2. *Mikhailichenko, G. G.* Dimetric Physical Structures of Rank $(n + 1, 2)$, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 513–522. DOI: 10.1007/BF00971227.
3. *Kulakov, Yu. I.* A Mathematical Formulation of the Theory of Physical Structures, *Siberian Mathematical Journal*, 1971, vol. 12, no. 5, pp. 822–824. DOI: 10.1007/BF00966522.

4. *Mikhailichenko, G. G.* The Solution of Functional Equations in the Theory of Physical Structures, *Doklady Akademii Nauk*, 1972, vol. 206, no. 5, pp. 1056–1058 (in Russian).
5. *Kyrov, V. A.* On the Embedding of Two-Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2018, no. 56, pp. 5–16 (in Russian). DOI 10.17223/19988621/56/1.
6. *Bogdanova, R. A., Mikhailichenko, G. G. and Muradov, R. M.* Successive in Rank $(n+1, 2)$ Embedding of Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets, *Russian Mathematics*, 2020, no. 64, pp. 6–10. DOI: 10.3103/S1066369X2006002X.
7. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Embedding of the Additive Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometry of Two Sets of Rank $(2, 2)$ into the Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets of Rank $(3, 2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 305–327 (in Russian). DOI: 10.20537/vm180304.
8. *Kyrov, V. A.* Two-Metric Spaces, *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 25–35.
9. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Nondegenerate Canonical Solutions of one System of Functional Equations, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 8, pp. 40–48. DOI: 10.3103/S1066369X21080053.
10. *Kostrikin, A. I. Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra], Moscow, Nauka, 1977, 495 p. (in Russian).
11. *Murnaghan, F. D. and Wintner, A.* A Canonical Form for Real Matrices Under Orthogonal Transformations, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1931, vol. 17, pp. 417–420. DOI: 10.1073/pnas.17.7.417.

Received July 15, 2021

Vladimir A. Kyrov
Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia,
Associate Professor
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706