Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 2, С. 27–37

УДК 519.17
DOI 10.23671/VNC.2019.2.32115

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОМ ГРАФЕ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}^{\#}$

А. А. Махнев[1,2], **А. А. Токбаева**[3]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Уральский федеральный университет,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19;
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, tok2506@mail.ru

Аннотация. Доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ дополнительный граф для Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Банг и Кулен изучали дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $(t+1)s, ts, (s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi$. При $t = 4$, $s = 7$, $\psi = 6$ получим массив $35, 28, 6; 1, 2, 30$. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ имеет спектр 35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}, $v = 1 + 35 + 490 + 98 = 624$ вершин, и $\overline{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{30}(35, 14)$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше 8. Доказано, что либо окрестность любой вершины в Γ является объединением изолированных 7-клик, либо окрестность любой вершины в Γ не содержит 7-клик и является связным графом. Изучено строение группы G автоморфизмов графа Γ с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$. В частности, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и реберно симметричный граф Γ имеет разрешимую группу автоморфизмов.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, клика Дельсарта, геометрический граф.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Токбаева А. А.* О дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 27–37. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32115.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$)

[#]Работа выполнена при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,\ldots,b_{d-1}; c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k-b_i-c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Пусть Γ — граф диаметра d, $2 \leqslant i \leqslant d$. Тогда граф Γ_i имеет то же множество вершин, что и Γ, и вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда расстояние между ними в Γ равно i.

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$, не больше $1+k/m$. Клика K с $1+k/m$ вершинами называется *кликой Дельсарта*. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство S клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из S.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *частичным пространством прямых*, если любые две точки лежат не более чем на одной прямой.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем в одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с $c_2 = 2$, Δ — окрестность вершины a в Γ. Тогда любые две несмежные вершины из Δ имеют в Δ не более одного общего соседа, поэтому любое ребро из Δ лежит в единственной максимальной клике из Δ и Δ — граф коллинеарности частичного пространства прямых, имеющий обхват по крайней мере 5. Далее, Δ — регулярный граф степени a_1 на k вершинах. Броувер и Ноймайер [2; теорема 1.1] получили следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Связное частичное пространство прямых обхвата по крайней мере 5, имеющего более чем одну прямую, в котором каждая точка имеет λ соседей, содержит $k \geqslant \lambda(\lambda+3)/2$ точек. Равенство выполняется только в случае $k=5$, $\lambda=2$.*

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{35,28,6;1,2,30\}$ имеет спектр 35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}, $v = 1+35+490+98 = 624$ вершин, и $\overline{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{30}(35,14)$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше 8.

В данной работе исследуются свойства дистанционно регулярного графа Γ с массивом персечений $\{35,28,6;1,2,30\}$. В [3] изучается класс графов $G(s,t,\psi)$ с массивом пересечений $\{(t+1)s, ts, (t-1)(s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi\}$ (наш массив получается при $t=4$, $s=7$, $\psi=6$).

2. Доказательство теоремы 2.1

Теорема 2.1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35,28,6;1,2,30\}$. Тогда либо Γ — геометрический граф, либо окрестность любой вершины в Γ не содержит 7-клик и является связным графом.*

В этом параграфе предполагается, что дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{35,28,6;1,2,30\}$, и окрестность вершины a в графе Γ не является объединением пяти изолированных 7-клик. Так как $a_1=6$, $c_2=2$, то $\Delta=[a]$ является регулярным графом степени 6 на 35 вершинах. Максимальную клику C из Δ с $|C|=i$ назовем i-прямой. Фиксируем вершину $b\in\Delta$ и пусть число i-прямых, проходящих через b, равно x_i.

Лемма 2.1. *Для вершины b выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) $x_2=4$, $x_3=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=28$;
(2) $x_2=3$, $x_4=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=24$;
(3) $x_2=2$, $x_3=2$ *и* $|\Delta_2(b)|=26$;
(4) $x_2=2$, $x_5=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=18$;
(5) $x_2=1$, $x_3=x_4=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=22$;
(6) $x_2=1$, $x_6=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=10$;
(7) $x_2=0$, $x_3=3$ *и* $|\Delta_2(b)|=24$;
(8) $x_2=0$, $x_3=x_5=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=16$;
(9) $x_2=0$, $x_4=2$ *и* $|\Delta_2(b)|=18$;
(10) $x_2=0$, $x_7=1$ *и* $|\Delta_2(b)|=0$.

$\lhd$ Если $x_2=6$, то $|\Delta_2(b)|=30$, противоречие.
Если $x_2=4$, то $x_3=1$ и $|\Delta_2(b)|=28$.
Если $x_2=3$, то $x_4=1$ и $|\Delta_2(b)|=24$.
Если $x_2=2$, то либо $x_3=2$ и $|\Delta_2(b)|=26$, либо $x_5=1$ и $|\Delta_2(b)|=20$.
Если $x_2=1$, то либо $x_3=x_4=1$ и $|\Delta_2(b)|=22$, либо $x_6=1$ и $|\Delta_2(b)|=10$.
Если $x_2=0$, то либо $x_3=3$ и $|\Delta_2(b)|=24$, либо $x_3=x_5=1$ и $|\Delta_2(b)|=16$, либо $x_4=2$ и $|\Delta_2(b)|=18$, либо $x_7=1$ и $|\Delta_2(b)|=0$. $\rhd$

Лемма 2.2. *Пусть y_i — число вершин, лежащих на (i)-прямых из Δ, $i\in\{1,2,\ldots,10\}$, z_j — число j-прямых в Δ, $j\in\{2,3,\ldots,6\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
(1) $y_1+y_2+\ldots+y_{10}=35$;
(2) $z_6=y_6/6$ *и* $z_5=(y_4+y_8)/5$;
(3) $z_4=(y_2+y_5+2y_9)/4$ *и* $z_3=(y_1+2y_3+y_5+3y_7)/3$;
(4) $z_2=(4y_1+2y_3+2y_4+y_5+y_6)/2$.

$\lhd$ Все утверждения леммы следуют из леммы 2.1. $\rhd$

По лемме 2.2 число y_6 делится на 6, по утверждению (4) леммы 2.2 число y_5 четно и по утверждению (3) леммы 2.2 число y_2 четно.

Лемма 2.3. *Пусть K является кликой в Δ и $|K|=i$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $i=6$, то Δ содержит 6 вершин, смежных с вершинами из K и индуцирующих коклику;*

(2) *если $i=5$, то Δ содержит 5 пар вершин, смежных с вершинами из K, и вершины из разных пар не смежны.*

$\lhd$ Пусть $i=6$. Тогда Δ содержит 6 вершин, смежных с вершинами из K. Если две из этих вершин смежны, то Δ содержит четырехугольник, противоречие.

Пусть $i=5$. Тогда Δ содержит 5 пар верши, смежных с вершинами из K. Если некоторые вершины из разных пар смежны, то Δ содержит четырехугольник, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.4. *Имеем $y_{10}=0$.*

$\lhd$ Допустим, что b лежит на 7-прямой K. Ввиду предложения 1.1 граф $\Delta^0 = \Delta - K$ связен, поэтому $y_{10} = 7$. Далее, для любой вершины $c \in \Delta^0$ имеем $|\Delta_2(c)| \leqslant 21$, поэтому $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ и $y_5 = y_7 = 0$. По лемме 2.2 получим $y_4 + y_6 + y_8 + y_9 = 28$, $z_6 = y_6/6$, $z_5 = (y_4 + y_8)/5$, $z_3 = 0$, $z_4 = y_9/2$ и $z_2 = (2y_4 + y_6)/2$.

Если Δ^0 содержит максимальную 5-клику L, то ввиду леммы 2.1 и равенства $z_3 = 0$ подграф Δ^0 содержит 5 пар вершин, смежных с вершинами из L, индуцирующими 10-коклику, противоречие с предложением 1.1, примененным к Δ^0. Значит, $y_4 = y_8 = 0$. Противоречие с тем, что Δ^0 является несвязным графом с компонентами, индуцированными вершинами типа y_6 и y_9. $\rhd$

Из лемм 2.1–2.4 следует теорема 2.1.

Лемма 2.5. *Пусть Γ является реберно симметричным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$. Тогда либо Γ является геометрическим, либо окрестность любой вершины является вполне регулярным графом с параметрами $(35, 6, 1, 1)$.*

$\lhd$ Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и a — вершина графа Γ. Тогда G_a действует транзитивно на $[a]$.

Пусть $\Delta = [a]$ не является объединением изолированных 7-клик и y_i — число вершин типа (i) из Δ. Тогда $y_i = 35$ для некоторого i.

По лемме 2.2 имеем $z_6 = y_6/6$, $z_5 = (y_4+y_8)/5$, $z_4 = (y_2+y_5+2y_9)/4$, $z_3 = (y_1+2y_3+y_5+3y_7)/3$ и $z_2 = (4y_1 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6)/2$.

Если $i = 1$, то $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ и $z_3 = 35/3$, противоречие.

Если $i = 2$, то $z_5 = z_6 = 0$ и $z_4 = 35/4$, противоречие.

Если $i = 3$, то $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ и $z_3 = 70/3$, противоречие.

Если $i = 4$, то $z_3 = z_4 = z_6 = 0$, $z_5 = 7$ и $z_2 = 35$. В этом случае имеем разбиение Δ семью 5-кликами. Пусть K является 5-кликой из Δ. Тогда вершины из K имеют 10 соседей вне K. Две из этих 10 вершин попадают в 5-клику K', противоречие с тем, что $K \cup K'$ содержит четырехугольник, противоречие.

Если $i = 5$, то $z_5 = z_6 = 0$ и $z_4 = 35/4$, противоречие.

Если $i = 6$, то $z_6 = 35/6$, противоречие.

Если $i = 7$, то $z_3 = 35$ и $z_i = 0$ для $i \neq 3$. В этом случае Δ является вполне регулярным графом с параметрами (35,6,1,1).

Если $i = 8$, то $z_2 = z_3 = z_4 = z_6 = 0$ и $z_5 = 7$. Снова имеем разбиение Δ семью 5-кликами, противоречие как и выше.

Если $i = 9$, то $z_4 = 70/4$, противоречие. $\rhd$

3. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$

Теорема 3.1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40s + 24$ и $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 60l + 24$ и $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$, либо $p = 13$, $\alpha_3(g) = 260s + 104$ и $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$;

(2) Ω является n-кликой, либо $p = 7$, $n = 1, 8$, $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$, $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$, либо $p = 2$, $n \in \{2, 4, 6\}$, $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$ и $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$;

(3) Ω является m-кокликой, $m > 1$, вершины из Ω находятся на расстоянии 3 в Γ и либо $p = 5$, $m \in \{4, 9, 14\}$, $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$ и $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$, либо $p = 7$, $m \in \{8, 15\}$, $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$ и $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$;

(4) Ω *содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик,* $p = 2$ *и* $|\Omega| \leqslant 18$;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \leqslant 5$.

В этом параграфе будем предполагать, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 3.1. *Граф* Γ_3 *является сильно регулярным с параметрами* $(624, 98, 22, 14)$ *и* Γ *имеет следующие ненулевые числа пересечений:*

(1) $p^1_{11} = 6$, $p^1_{21} = 28$, $p^1_{22} = 378$, $p^1_{23} = 84$, $p^1_{33} = 14$;
(2) $p^2_{11} = 2$, $p^2_{12} = 27$, $p^2_{13} = 6$, $p^2_{22} = 384$, $p^2_{23} = 78$, $p^2_{33} = 14$;
(3) $p^3_{12} = 30$, $p^3_{22} = 390$, $p^3_{13} = 5$, $p^3_{23} = 70$ *и* $p^3_{33} = 22$.

$\lhd$ Напомним, что для вершин u, w, находящихся на расстоянии l, через p^l_{ij} обозначается число вершин z с $d(u,z) = i$ и $d(z,w) = j$. Заметим, что $p^2_{12} = a_2$, $p^3_{13} = a_3$. По лемме 4.1.7 из [1] получим

$p^1_{ii-1} = c_i k_i/k$, $p^1_{ii} = a_i k_i/k$, $p^1_{ii+1} = b_i k_i/k$,
$p^i_{i-22} = c_{i-1}c_i/\mu$, $p^{i-1}_{i+12} = b_{i-1}b_i/\mu$, $p^2_{i-1i+1} = k_i c_i b_i/(kb_1)$,
$p^{i-1}_{i2} = b_{i-1}(a_i + a_{i-1} - a_1)/\mu$, $p^{i+1}_{i2} = c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)/\mu$.

Имеем $a_1 = 6$, $a_2 = 29$ и $a_3 = 5$. Далее, $k_1 = 35$, $k_2 = 490$ и $k_3 = 98$. Поэтому $p^1_{21} = b_1 = 28$ и $p^1_{32} = c_3k_3/k = 84$.

Аналогично $p^1_{11} = a_1 = 6$, $p^1_{22} = a_2k_2/k = 378$ и $p^1_{33} = a_3k_3/k = 14$.

Далее, $p^3_{12} = c_3 = 30$, $p^2_{13} = b_2 = 6$, $p^3_{22} = p^3_{12}(a_2 + a_3 - a_1)/\mu = 390$ и $p^2_{32} = b_2(a_3 + a_2 - a_1)/\mu = 78$. Поэтому $p^2_{33} = 20 - p^2_{23} - p13^2 = 14$.

Снова по лемме 4.1.7 из [1] получим $p^2_{22} = (p^2_{11}b_1 + p^2_{12}(a_2 - a_1) + p^2_{13}c_3 - p^2_{02}b_0)/\mu = 384$, $p^3_{23} = 70$ и $p^3_{33} = 22$.

Теперь граф Γ_3 является сильно регулярным с параметрами $(624, 98, 22, 14)$. $\rhd$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ диаметра d на n вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, и для $i \leqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij}A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $k = p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I — единичная матрица порядка $d+1$. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и m_ju_j являются строками матрицы Q [4, теорема 17.12].

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда [4, §3.7] для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 3.2. *Пусть $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 168, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 182. Тогда $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 96)/70$, $\chi_2(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_3(g) - 104)/20$, и числа $\chi_1(g) - 168$, $\chi_2(g) - 182$ делятся на p, если g — элемент простого порядка p.*

$\lhd$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 168 & \frac{216}{5} & \frac{-48}{35} & \frac{-72}{7} \\ 182 & \frac{-26}{5} & \frac{-26}{5} & 26 \\ 273 & -39 & \frac{39}{7} & \frac{-117}{7} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (245\alpha_0(g) + 63\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 15\alpha_3(g))/910$. Подставляя $\alpha_2(g) = 624 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 96)/70$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (35\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 5\alpha_3(g))/120$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 624 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_3(g) - 104)/20$.

Последнее утверждение следует из [5, лемма 2]. $\rhd$

Выберем вершину $a \in \Gamma$ и положим $k_i = |\Gamma_i(a)|$. Тогда $k_2 = 490$ и $k_3 = 98$. Пусть g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По [6, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \leqslant 624 \cdot 22/84 = 163$.

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40s + 24$ и $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 60l + 24$ и $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$, либо $p = 13$, $\alpha_3(g) = 260s + 104$ и $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $p = 7$, $n = 1, 8$, $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$, $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$, либо $p = 2$, $n \in \{2, 4, 6\}$, $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$ и $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m > 1$, то $p = 5$, $m \in \{4, 9, 14\}$, $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$ и $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$ или $p = 7$, $m \in \{8, 15\}$, $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$ и $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$;*

(4) *если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 2$ и $|\Omega| \leqslant 18$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 16 \cdot 39$, то p равно 2, 3 или 13.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$ четно и $\alpha_3(g) = 40s + 24$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 8s - 24)/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$.

В случае $p = 3$ число $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 60l + 24$. Далее, $\chi_1(g) = (5\alpha_1(g) - (60l + 24) - 96)/70 = (\alpha_1(g) - 12l - 24)/14$, поэтому $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$.

В случае $p = 13$ число $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$ делится на 13 и $\alpha_3(g) = 260s + 104$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 52s - 40)/14$ сравнимо с -1 по модулю 13, поэтому $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 35 и 98, поэтому $p = 7$. Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$ и на $[a] - b^{\perp}$. Отсюда p делит $8 - n$ и 28, поэтому либо $p = 7$ и $n = 8$, либо $p = 2$ и $n \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Если $p = 7$, то $\chi_2(g) = (6n + \alpha_3(g) - 104)/20$ и $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$, число $\chi_1(g) = (19n + 5\alpha_1(g) - (140l + 104 - 6n) - 96)/70 = (\alpha_1(g) - 40 + 5n)/14$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$.

Если $p = 2$, то число $\chi_2(g) = (6n + \alpha_3(g) - 104)/20$ четно, и $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$, число $\chi_1(g) = (19n + 5\alpha_1(g) - (104 + 40s - 6n) - 96)/70 = (5n + \alpha_1(g) - 8s - 40)/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Если две вершины $a, b \in \Omega$ находятся на расстоянии 2, то g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$ и на $[a]$, поэтому p делит 2 и 35, противоречие. Значит, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, и p делит 35 и $99 - m$, поэтому $p \in \{5, 7\}$. Заметим, что порядок клики в Γ_3 не больше 17.

В случае $p = 5$ имеем $m \in \{4, 9, 14\}$. Число $\chi_2(g) = (6m + \alpha_3(g) - 104)/20$ сравнимо с 2 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$. Далее, число $\chi_1(g) = (19m + 5\alpha_1(g) - (-6m + 100s + 44) - 96)/70 = (5m + \alpha_1(g) - 20s - 28)/14$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$.

В случае $p = 7$ имеем $m \in \{8, 15\}$. Число $\chi_2(g) = (6m + \alpha_3(g) - 104)/20$ делится на 7 и $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$. Далее, число $\chi_1(g) = (19m + 5\alpha_1(g) - (-6m + 140s - 36) - 96)/70 = (5m + \alpha_1(g) - 28s - 12)/14$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Так как $p^1_{21} = 28$, то $p = 2, 7$. Если вершины из разных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, то с учетом равенства $p^3_{12} = 30$ имеем $p = 2$. Далее, $p^3_{13} = 5$, поэтому порядки максимальных клик в Ω равны 2, 4 или 6. Наконец, $p^1_{33} = 14$, поэтому $|\Omega| \leqslant 18$.

Пусть Ω содержит две вершины a, b на расстоянии 2, $[a] \cap [b] = \{u, u^g\}$. Тогда $p = 2$ и $\Omega(a)$ содержит нечетное число вершин из $\Gamma_2(b)$ и четное число вершин из $\Gamma_3(b)$. Если $\Omega(a)$ содержит две вершины c, d из $\Gamma_3(b)$, то $[c] \cap [u] = \{a, e\} = [c] \cap [u^g]$ для некоторой вершины $e \in \Omega$, а степень b в Ω не больше 5. В этом случае $|\Omega| \leqslant 18$.

Если же $\Omega(a)$ не пересекает $\Gamma_3(b)$ и $\Omega(b)$ не пересекает $\Gamma_3(a)$, то $[u] \cap [u^g]$ содержит не более 6 вершин из Ω. Для вершины $c \in \Omega(a) - [u]$ подграф $[c] \cap [u]$ содержит две вершины из Ω и $[c] \cap [b] = \{w, w^g\}$. Поэтому $|\Omega(a) - [u]| \leqslant 4$, степени вершин a, b в Ω не больше 5 и снова $|\Omega| \leqslant 18$.

(1) $p^1_{11} = 6$, $p^1_{21} = 28$, $p^1_{22} = 378$, $p^1_{23} = 84$, $p^1_{33} = 14$;
(2) $p^2_{11} = 2$, $p^2_{12} = 27$, $p^2_{13} = 6$, $p^2_{22} = 384$, $p^2_{23} = 78$, $p^2_{33} = 14$;
(3) $p^3_{12} = 30$, $p^3_{22} = 390$, $p^3_{13} = 5$, $p^3_{23} = 70$ и $p^3_{33} = 22$. $\rhd$

Лемма 3.4. *Если* $[a] \subset \Omega$ *для некоторой вершины* a, *то для любой вершины* $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$ *орбита* $u^{\langle g \rangle}$ *является кликой или кокликой,* $p \leqslant 3$ *и в случае* $a^\perp = \Omega$ *либо* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 60l - 72$ *и* $\alpha_1(g) = 42t + 12l - 132$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40l + 8$ *и* $\alpha_1(g) = 28t + 8l - 116$.

$\lhd$ Пусть $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликой. В любом случае подграф $[a] \cap [u]$ является 2-кликой и для двух вершин $b, c \in [a] \cap [u]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a и p вершин из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $p \leqslant 5$.

В случае $p = 5$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой, иначе $[b] \cap [c]$ является 6-кокликой, противоречие с леммой 2.1. Теперь граф $\Delta = [b]$ содержит максимальную 6-клику $K = u^{\langle g \rangle} \cup \{c\}$, $\Delta(u^{g^i}) - K$ содержит единственную вершину d_i и по лемме 2.3 подграф $\{d_1, \ldots, d_5\}$ является кокликой. Отсюда $d_i \notin \Omega$ и $\{d_1, \ldots, d_5\}$ является $\langle g \rangle$-орбитой, противоречие. Итак, $p \leqslant 3$.

Пусть $a^\perp = \Omega$. Тогда $\alpha_0(g) = 36$. В случае $p = 3$ число $\chi_2(g) = (216 + \alpha_3(g) - 104)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 60l - 72$. Далее, $\chi_1(g) = (132 + \alpha_1(g) - 12l)/14$ и $\alpha_1(g) = 42t + 12l - 132$.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = (216 + \alpha_3(g) - 104)/20$ четно и $\alpha_3(g) = 40l + 8$. Далее, число $\chi_1(g) = (116 + \alpha_1(g) - 8l)/14$ четно и $\alpha_1(g) = 28t + 8l - 116$. $\rhd$

Лемма 3.5. *Если Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, то $p \leqslant 5$.*

$\lhd$ Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p > 7$, то $[a] \subset \Omega$, противоречие с леммой 3.4.

Пусть $p = 7$. Тогда g фиксирует по 6 вершин из $[a] \cap [b]$, $[a] \cap [c]$ и вторую вершину e из $[b] \cap [c]$. Если $[a]$ не является объединением пяти изолированных 7-клик, то ввиду теоремы 2.1 имеем $[a] \subset \Omega$, противоречие с леммой 3.4. Значит $[a]$ является объединением пяти изолированных 7-клик. Аналогично каждый из графов $[e]$, $[b]$, $[c]$ является объединением пяти изолированных 7-клик. Отсюда связная компонента Δ графа Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', 7s, 6, 2)$. Если Ω не является связным графом, то степень графа Δ не больше 5, противоречие. Итак, $\Delta = \Omega$, $|\Omega| \leqslant 163$, поэтому $s = 2$.

Если Ω — сильно регулярный граф, то Ω является 8×8-решеткой, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $64\cdot 21$, противоречие. Значит, можно считать, что Ω содержит вершину e из $\Gamma_3(a)$. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{14, 7, 6; 1, 2, 8\}$, противоречие. $\rhd$

Теорема 3.1 доказана.

4. Доказательство следствия

Следствие 1. *Пусть дистанционно регулярный граф с массивом персечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ является реберно симметричным. Тогда группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ разрешима.*

В этом параграфе будем предполагать, что Γ является реберно симметричным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и a, b — смежные вершины графа Γ. Тогда G_a действует транзитивно на $[a]$, $|G : G_a| = 624$ и $|G_a : G_{a,b}| = 35$. По теореме 2.1 имеем $|G| = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta 13$.

Лемма 4.1. *Если f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $p \leqslant 3$ и Ω — пустой граф или Ω содержит геодезический 2-путь.*

$\lhd$ Пусть f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Ω — пустой граф, то по теореме 3.1 либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40s + 24$ и $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 60l + 24$ и $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$. Так как числа $\alpha_i(g)$ делятся на 13, то либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 624$ или $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_1(g) = 208$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 624$.

Если Ω — непустой граф, то $|\Omega| = 13e$, по теореме 3.1 Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leqslant 5$.

Если $p = 5$, то $e - 3$ делится на 5, число $\chi_2(g) = (78e + \alpha_3(g) - 104)/20$ сравнимо с 2 по модулю 5, $\alpha_3(g) = 100s + 144 - 78e$ и $s + 3$ делится на 13. Отсюда $s = 10$, $e = 8$ и $\alpha_3(g) = 1144 - 624 = 520$. В этом случае $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_1(g) = (1976 - 616)/70 = 136/7$, противоречие.

Если $p = 3$, то e делится на 3, $e \leqslant 12$, число $\chi_2(g) = (78e + \alpha_3(g) - 104)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 60s + 144 - 78e$ и $5s - 1$ делится на 13. Отсюда либо $s = 8$ и $\alpha_3(g) = 624 - 78e$, либо $s = 21$ и $\alpha_3(g) = 1404 - 78e$. В первом случае $\chi_1(g) = (19 \cdot 13e + 5\alpha_1(g) - (624 - 78e) - 96)/70 = (13\cdot 104 + 5\alpha_1(g) + 78e - 96)/70 = (1256 + 5\alpha_1(g) + 78e)/70$. Отсюда $3e + 1$ делится на 5 и $e = 3, 8$. Если $e = 3$, то $\chi_1(g) = (258 + \alpha_1(g))/14$ и $\alpha_1(g) = 6(7t - 43)$. Если $e = 8$, то $\chi_1(g) = (376 + \alpha_1(g))/14$ и $\alpha_1(g) = 42t + 2$.

Во втором случае $\chi_1(g) = (19\cdot 104 + 5\alpha_1(g) - (1404 - 78e) - 96)/70 = (13\cdot 104 + 5\alpha_1(g) + 78e - 96)/70 = (1256 + 5\alpha_1(g) + 78e)/70$. Отсюда $3e+1$ делится на 5 и $e = 3, 8$. Если $e = 3$, то $\chi_1(g) = (258 + \alpha_1(g))/14$ и $\alpha_1(g) = 6(7t - 43)$. Если $e = 8$, то $\chi_1(g) = (376 + \alpha_1(g))/14$ и $\alpha_1(g) = 42t + 2$ и $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$. Так как числа $\alpha_i(g)$ делятся на 13, то либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 624$ или $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_1(g) = 208$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 624$ — пустой граф, то, противоречие с леммой 2.4. Значит, $[a]$ является объединением пяти изолированных 7-клик. Аналогично каждый из графов $[e]$, $[b]$, $[c]$ является объединением пяти изолированных 7-клик. Отсюда связная компонента Δ графа Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', 7s, 6, 2)$. Если Ω не является связным графом, то степень графа Δ не больше 5, противоречие. Итак, $\Delta = \Omega$, $|\Omega| \leqslant 163$, поэтому $s = 2$.

Если Ω — сильно регулярный граф, то Ω является 8×8-решеткой, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $64\cdot 21$, противоречие. Значит, можно считать, что Ω содержит вершину e из $\Gamma_3(a)$. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{14, 7, 6; 1, 2, 8\}$, противоречие. $\rhd$

Лемма 4.2. *Группа G разрешима.*

$\lhd$ Если G — неразрешимая группа, $\overline{T}$ — цоколь группы $\overline{G} = G/S(G)$, то ввиду леммы 4.1 число 13 делит $|\overline{T}|$. По [7, таблица 1] группа $\overline{T}$ изоморфна $Sz(8)$, $L_2(64)$, $U_4(5)$, $L_3(9)$, $PSp_6(3)$, $P\Omega_7(3)$, $G_2(4)$, $Sp_4(8)$, $P\Omega_8^+(3)$.

Так как $\overline{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $64\cdot 39$, то с помощью Атласа получим $\overline{T} \cong U_4(5), Sp_4(8)$.

Если $\overline{T}$ изоморфна группе $U_4(5)$ порядка $2^7 3^4 5^6 7\cdot 13$, то $\overline{T}_a$ — максимальная 5-локальная подгруппа, изоморфная либо расширению группы порядка 5^5 с помощью расширения группы $SU_2(5)$ посредством группы порядка 24, либо расширению группы порядка 5^4 с помощью расширения группы $SL_2(25)$ посредством группы порядка 4, противоречие.

Если $\overline{T}$ изоморфна группе $Sp_4(8)$ порядка $2^{12}3^4 5\cdot 7^2 13$, то максимальные 2-локальные подгруппы имеют индекс, кратный 5, подгруппы $O_4^-(8)$, $Sz(8)$ и $Sp_2(64).2$ имеют индекс, не кратный 13, $Sp_4(2).3$ имеет индекс, кратный 7, $L_2(8)$, $O_4^+(8)$ имеют индекс, кратный 5, противоречие. $\rhd$

Из леммы 4.2 получаем следствие 1.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag.—1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Brouwer A. E., Neumaier A.* A remark on partial linear spaces with girth 5 with an application to strongly regular graphs // Combinatorica.—1988.—Vol. 8.—P. 57–61. DOI: 10.1007/BF02122552.
3. *Bang S., Koolen J. H.* On geometric distance-regular graphs with diameter three // European J. Combin.—2014.—Vol. 36.—P. 331–341. DOI: 10.1016/j.ejc.2013.06.044.
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45). DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Gavrilyuk A. L., Makhnev A. A.* On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Doklady Mathematics.—2010.—Vol. 81, № 3.—P. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311.—P. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005
7. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 19 февраля 2019 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
Уральский федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и топологии
РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Токбаева Альбина Аниуаровна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
старший преподаватель кафедры алгебры и диф. уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: tok2506@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 2, P. 27–37

ON A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH AN INTERSECTION ARRAY $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$

Makhnev, A. A.[1,2] and Tokbaeva, A. A.[3]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;
Ural Federal University,
19 Mira St., 620002 Ekaterinburg, Russia;
[3] Kh. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, tok2506@mail.ru

Abstract. It is proved that for a distance-regular graph Γ of diameter 3 with eigenvalue $\theta_2 = -1$ the complement graph of Γ_3 is pseudo-geometric for $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Bang and Koolen investigated distance-regular graphs with intersection arrays $(t+1)s, ts, (s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi$. If $t = 4$, $s = 7$, $\psi = 6$ then we have array $35, 28, 6; 1, 2, 30$. Distance-regular graph Γ with intersection array $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ has spectrum of 35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}, $v = 1+35+490+98 = 624$ vertices and $\overline{\Gamma}_3$ is a pseudogeometric graph for $pG_{30}(35, 14)$. Due to the border of Delsarte, the order of clicks in Γ is not more than 8. It is also proved that either a neighborhood of any vertex in Γ is the union of an isolated 7-click, or the neighborhood of any vertex in Γ does not contain a 7-click and is a connected graph. The structure of the group G of automorphisms of a graph Γ with an intersection array $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ has been studied. In particular, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ and the edge symmetric graph Γ has a solvable group automorphisms.

Key words: distance-regular graph, Delsarte clique, geometric graph.

Mathematical Subject Classification (2000): 20D05.

For citation: *Makhnev, A. A. and Tokbaeva, A. A.* On a Distance-Regular Graph with an Intersection Array $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 27–37 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32115.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Brouwer, A. E. and Neumaier, A.* A Remark on Partial Linear Spaces with Girth 5 with an Application to Strongly Regular Graphs, *Combinatorica*, 1988, vol. 8, pp. 57–61. DOI: 10.1007/BF02122552.

3. *Bang, S. and Koolen, J. H.* On Geometric Distance-Regular Graphs with Diameter Three, *European J. Combin.*, 2014, vol. 36, pp. 331–341. DOI: 10.1016/j.ejc.2013.06.044.
4. *Cameron, P. J. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts, no.* 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. *Behbahani, M. and Lam, C.* Strongly Regular Graphs with Nontrivial Automorphisms, *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, pp. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
7. *Zavarnitsine, A. V.* Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received February 19, 2019

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology;

Ural Federal University,
19 Mira St., 620002 Ekaterinburg, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Albina A. Tokbaeva
Kh. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,
Senior Lecturer of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: `tok2506@mail.ru`