Владикавказский математический журнал
апрель–июнь, 2007, Том 9, Выпуск 2

УДК **517.982**

УСЛОВИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОСТИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

М. А. Шубарин

В статье рассматриваются несколько вариантов обобщения теоремы М. М. Драгилева об интерполяции пространств Кёте на семейства пространств Фреше общего вида. Построены «безбазисные» варианты этого утверждения, которые являются необходимыми и, при дополнительных ограничениях на пространства, достаточными для интерполяционности одной тройки пространств относительно другой.

Ключевые слова: пространство Фреше, интерполяционная тройка, когерентно ядерный оператор.

1. Если дана матрица $A = (a_{p,n})_{p,n=1}^{+\infty}$ такая, что для любого p существуют q и $C > 0$ такие, что $0 < a_{p,n} \leqslant C a_{q,n}$ для всех n, то *пространством Кёте* $K_s(A)$, $s \geqslant 1$, называют векторное пространство числовых последовательностей

$$K_s(A) := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{+\infty} \, : \, \forall\, p \ \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^s a_{p,n}^s \right)^{1/s} < +\infty \right\}.$$

В частности, $K(A) := K_1(A)$. Набор норм $(\|\cdot\|_p)$ задает в этом пространстве топологию пространства Фреше (т. е. топологию полного метризуемого локально выпуклого пространства).

При изучении свойств общих базисов в паре пространств Фреше, продолжаемых в промежуточное между ними пространство, М. М. Драгилев [2] нашел условия, при которых пространство Кёте интерполяционно между данными пространствами. Им было доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть даны пространства Кёте $K(A^{(0)})$, $K(A)$, $K(A^{(1)})$ такие, что $K(A^{(1)}) \subset K(A) \subset K(A^{(0)})$. Интерполяционность пространства $K(A)$ между $K(A^{(0)})$ и $K(A^{(1)})$ равносильна следующему условию:*

$$\forall\, \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \ \exists\, \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, p \ \exists\, C_p > 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$
$$\frac{a_{p,n}}{a_{\psi(p),m}} \leqslant C_p \max_{j=0,1,\, r \leqslant \psi(p)} \frac{a_{r,n}^{(j)}}{a_{\varphi(r),m}^{(j)}}. \qquad (1)$$

Ниже будет показано, что это утверждение может быть частично перенесено на тройки пространств Фреше более общего вида, чем пространства Кёте.

2. Основные определения теории интерполяции линейных операторов, действующих в семействах банаховых пространств, естественно переносятся на семейства пространств

Фреше. Поэтому в статье без предварительного определения будут применяться основные понятия теории интерполяции линейных операторов: интерполяционная пара пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$, сумма $X_0 + X_1$ и пересечение $X_0 \cap X_1$ пространств из интерполяционной пары $[X_0, X_1]$, пространство $L(\overline{X}, \overline{Y})$ линейных непрерывных операторов, действующих в интерполяционных парах пространств Фреше.

Подробное изложение этой теории можно найти, например, в [5, 6, 9, 11, 13].

3. Пусть $\mathscr{K}$ — множество линейных операторов, действующих в парах пространств Фреше, такое, что $\mathscr{K}(\overline{X}, \overline{Y}) := \mathscr{K} \cap L(\overline{X}, \overline{Y}) \neq \{0\}$ для произвольных интерполяционных пар пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$, $\overline{Y} = [Y_0, Y_1]$.

Определение 1. Пусть даны пространства Фреше X_0, X, X_1, Y_0, Y, Y_1 такие, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1, Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$. Будем говорить, что тройка $[X_0, X, X_1]$ является $\mathscr{K}$-*интерполяционной* относительно тройки $[Y_0, Y, Y_1]$, если для произвольного оператора $T \in \mathscr{K}(\overline{X}, \overline{Y})$ выполняется следующее условие: сужение $T_{|X}$ оператора T на пространство X непрерывно действует из X в Y и $T_{|X} \in \mathscr{K}([X, X], [Y, Y])$.

В частности, если $\mathscr{K} = \mathscr{L}$ — множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в интерполяционных парах пространств Фреше, то условие $\mathscr{L}$-интерполяционности совпадает с условием интерполяционности (см., например, [5, гл. I, определение 4.2; 6, п. 9; 9, п. 1.1.1]). Интерполяционные свойства, связанные с различными совокупностями линейных операторов, действующих в парах пространств, изучались, например, С. Г. Крейном и П. А. Кучментом [16], В. И. Овчинниковым [17, 18].

4. Найдем необходимые условия $\mathscr{K}$-интерполяционности для следующих семейств операторов: $\mathscr{L}$-линейных непрерывных операторов, $\mathscr{LB}$-линейных ограниченных, $\mathscr{N}$-когерентно ядерных и $\mathscr{NB}$-ограничено когерентно ядерных операторов.

Пусть $\overline{X} = [X_0, X_1]$, $\overline{Y} = [Y_0, Y_1]$ — интерполяционные пары пространств Фреше и $(\|.\|_{p,j})_{p,j \in \mathbb{N}}$, $(|.|_{p,j})_{p,j \in \mathbb{N}}$ — наборы норм, задающие исходную топологию соответственно в X_j и Y_j, $j = 0, 1$. Пусть, кроме того, $(\|.\|'_{p,j})$, $(|.|'_{p,j})$ — сопряженные наборы норм соответсвенно в X_j и Y_j:

$$\|x\|'_{p,j} := \sup\{x'(x) : x \in X_j, \|x\|_{p,j} < 1\}, \quad |x|'_{p,j} := \sup\{x'(x) : x \in Y_j, |x|_{p,j} < 1\}.$$

Определение 2. Линейный непрерывный оператор $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$ называют:

a) *ограниченным*, если существуют абсолютно выпуклые открытые окрестности нуля U_0 и U_1 соответственно в X_0 и X_1 такие, что их образы TU_0 и TU_1 являются ограниченными множествами соответственно в Y_0 и Y_1;

b) *когерентно ядерным*, если существуют последовательности (x_n) в $Y_0 \cap Y_1$, (x'_n) в $(X_0 \cap X_1)'$ такие, что

i) $Tx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x'_n(x) x_n$ для произвольного $x \in X_0 \cap X_1$ (когерентно ядерное разложение оператора T);

ii) для любого p существует q такое, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x'_n|'_{q,j} \|x_n\|_{p,j} < +\infty$, $j = 0, 1$.

c) *ограничено когерентно ядерным*, если существует когерентно ядерное разложение этого оператора $Tx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x'_n(x) x_n$ такое, что для любого p существует q такое, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x'_n|'_{q,j} \|x_n\|_{p,j} < +\infty, \quad j = 0, 1.$$

Ограниченные операторы (и, в частности, компактные операторы), действующие в пространствах Фреше, изучались, например, в [10, 12, 14, 15]. Определение когерентно ядерных операторов, действующих в парах гильбертовых пространств, было дано В. И. Овчинниковым (см., например, [6, с. 61]).

Для перечисленных выше семейств операторов доказываются необходимые условия интерполяционности, аналогичные содержащимся в теореме 1.

Пусть даны тройки пространств $X_1 \subset X \subset X_0$ и $Y_1 \subset Y \subset Y_0$ и наборы норм $(\|.\|_{p,j})$, $(\|.\|_p)$, $(|.|_{p,j})$, $(|.|_p)$, задающие исходные топологии соответственно в X_j, X, Y_j, Y.

Теорема 2. *Если тройка* $[X_0, X, X_1]$ $\mathscr{L}$- *или* $\mathscr{N}$-*интерполяционна относительно тройки* $[Y_0, Y, Y_1]$, *то*

$$\begin{gathered}\forall\,\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ \exists\,\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ \forall\,p\ \exists\,C_p > 0 : \forall\,x \in Y_1\ \forall\,x' \in X_0' \\ |x|_p\ \|x'\|'_{\psi(p)} \leqslant C_p \max_{r \leqslant \psi(p), j=0,1} |x|_{r,j}\ \|x'\|'_{\varphi(r),j}.\end{gathered} \tag{2}$$

$\lhd$ Если все пространства, фигурирующие в теореме 2, банаховы, то аналог этого утверждения доказан в [10, теорема 4.3].

Докажем, что из $\mathscr{L}$-интерполяционности тройки $[X_0, X, X_1]$ относительно тройки $[Y_0, Y, Y_1]$ следует условие (2). Необходимость условия (2) для $\mathscr{N}$-интерполяционности доказывается аналогично.

Рассмотрим отображение $\Psi : L(\overline{X}, \overline{Y}) \to L(X, Y)$, $\Psi T := T_{|X}$. При сделанном предположении это отображение определено корректно. Доказательство условия (2) основано на возможности введения в пространствах операторов $L(\overline{X}, \overline{Y})$ и $L(X, Y)$ топологий, относительно которых построенное отображение имеет замкнутый график.

Будем использовать следующие обозначения:

(A) $X^{(s)}$, $Y^{(s)}$, $X^{(s,j)}$, $Y^{(s,j)}$ — пополнения пространств X, Y, X_j, Y_j соответственно по нормам $\|\cdot\|_s$, $|\cdot|_s$, $\|\cdot\|_{s,j}$, $|\cdot|_{s,j}$, $j = 0, 1$, $s \in \mathbb{N}$;

(B) $\overline{X^{(s)}} := [X^{(s,0)}, X^{(s,1)}]$, $\overline{Y^{(s)}} := [Y^{(s,0)}, Y^{(s,1)}]$, $s \in \mathbb{N}$.

Для произвольных индексов $s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространства $L(\overline{X^{(t)}}, \overline{Y^{(s)}})$, $L(X^{(t)}, Y^{(s)})$, состоящие из линейных непрерывных операторов, действующих соответственно из $\overline{X^{(t)}}$ в $\overline{Y^{(s)}}$ и из $X^{(t)}$ в $Y^{(s)}$ и рассматриваемые соответственно с нормами

$$\|T : \overline{X} \to \overline{Y}\|_{t,s} := \max_{j=0,1} \sup_{x \in X_j, x \neq 0} \frac{|Tx|_{s,j}}{\|x\|_{t,j}}, \quad \|T : X \to Y\|_{t,s} := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|Tx|_s}{\|x\|_t}.$$

Топологии в пространствах $L(\overline{X}, \overline{Y})$ и $L(X, Y)$ определим соответственно, как «индуктивно-проективные» и «проективно-индуктивные»:

$$L(\overline{X}, \overline{Y}) := \lim_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \operatorname{ind}\ \lim_{p} \operatorname{proj}\ L(\overline{X^{(\varphi(p))}}, \overline{Y^{(p)}}),$$

$$L(X, Y) := \lim \operatorname{proj}\ \lim_{q} \operatorname{ind}\ L(X^{(q)}, Y^{(p)}).$$

Наконец, положим

$$L^{(\varphi)}(\overline{X}, \overline{Y}) := \lim_{p} \operatorname{proj}\ L(\overline{X^{(\varphi(p))}}, \overline{Y^{(p)}}),$$

$$L_p([X, X], [Y, Y]) = L_p(X, Y) := \lim_{q} \operatorname{ind}\ L(X^{(q)}, Y^{(p)}).$$

Первое пространство операторов в (3) является пространством Фреше, топология в котором определяется набором норм $(\|\cdot\|_p^{(\varphi)})$,

$$\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|_p^{(\varphi)} := \max_{r\leqslant p}\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|_{\varphi(r),r},$$

а второе — индуктивным пределом счетного семейства банаховых пространств.

По построению, для произвольных $\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и p имеются непрерывные вложения $L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})\subset L(\overline{X},\overline{Y})$, $L(X,Y)\subset L_p(X,Y)$. Оператор Ψ индуцирует отображение $\Psi_{\varphi,p}: L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})\to L_p(X,Y)$. Определенное таким образом отображение имеет замкнутый график. Непрерывность оператора $\Psi_{\varphi,p}$ следует из теоремы о замкнутом графике [1, теорема 4.7.1].

Докажем существование индекса q такого, что оператор $\Psi_{\varphi,p}$ действует из $L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})$ в $L(X^{(q)},Y^{(p)})$. Если это предположение не выполняется, то существует последовательность операторов (T_q) в $L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})$ такая, что $\Psi_{\varphi,p}T_q\notin L(X^{(q)},Y^{(p)})$.

Из определения пространства $L(X^{(q)},Y^{(p)})$ следует существование последовательности (x_q) такой, что $\|x_q\|_q=1, |T_qx_q|_p>q$ для любого q. Не ограничивая общности, можно считать, что $T_q\to 0$ при $n\to\infty$ в топологии пространства $L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})$. Это следует из того, что условие $\Psi_{\varphi,p}(\lambda T_q)\notin L(X^{(q)},Y^{(p)})$ выполняется для произвольного скаляра λ.

Рассмотрим множество

$$U:=\left\{T\in L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})\,:\,\forall\, q\ |Tx_q|_p\geqslant q^{1/2}\right\}.$$

Из определения топологии индуктивного предела следует, что построенное множество является абсолютно выпуклой окрестностью нуля в $L_p(X,Y)$. Кроме того, если $|.|_U$ — функционал Минковского этого множества, то $|T|_U=\sup\limits_s s^{-1/2}|Tx_s|_p$. Искомое противоречие следует из того, что

$$|\Psi_{\varphi,p}T_q|_U=\sup_s s^{-1/2}|T_qx_s|_p\geqslant q^{-1/2}|T_qx_q|_p>q^{1/2}.$$

Таким образом доказано, что для произвольных $\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и p найдется индекс q такой, что оператор $\Psi_{\varphi,p}$ непрерывно действует из $L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})$ в $L(X^{(q)},Y^{(p)})$ или, что равносильно,

$$\begin{gathered}\forall\, p\ \forall\,\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists\, q=\psi(p),C:\forall\, T\in L^{(\varphi)}(\overline{X},\overline{Y})\\ \|T:X^{(q)}\to Y^{(p)}\|\leqslant C\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|_{\psi(p)}^{(\varphi)}.\end{gathered}\tag{4}$$

Неравенство (2) получается из (4), если применить его к семейству $(T_{x,x'})$ одномерных проекторов $T_{x,x'}y:=x'(y)x$, $x\in X_1$, $x'\in X_0'$.

Теорема 3. *Если тройка пространств Фреше* $[X_1,X,X_1]$ $\mathscr{L}B$*- или* $\mathscr{N}B$*-интерполяционна относительно тройки* $[Y_1,Y,Y_1]$*, то*

$$\begin{gathered}\exists\,\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \exists\,\psi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \forall\, r\ \forall\, p\ \exists\, C>0:\forall\, x\in X_1\ \forall\, y'\in Y_0'\\ \|x\|_p\ |y'|'_{\varphi(r)}\leqslant C\max_{j=0,1}\ \|x\|_{\psi(r,p),j}\ |y'|'_{r,j}.\end{gathered}\tag{5}$$

$\lhd$ Покажем, что из $\mathscr{L}\mathscr{B}$-интерполяционности тройки пространств $[X_0,X,X_1]$ относительно тройки $[Y_0,Y,Y_1]$ следует условие (5). Используя введенные в теореме 2 обозначения, наделим пространства $\mathscr{LB}(\overline{X},\overline{Y})$ и $\mathscr{LB}([X,X],[Y,Y])$ топологией «индуктивно-проективного» предела:

$$\mathscr{LB}(\overline{X},\overline{Y}) := \lim_{q\in\mathbb{N}}\operatorname{ind}\lim_{p\in\mathbb{N}}\operatorname{proj}\ L(\overline{X^{(q)}},\overline{Y^{(p)}}),$$
$$\mathscr{LB}([X,X],[Y,Y]) = \mathscr{LB}(X,Y) := \lim_{q\in\mathbb{N}}\operatorname{ind}\lim_{p\in\mathbb{N}}\operatorname{proj}\ L(X^{(q)},Y^{(p)}).$$

Рассмотрим оператор $\Phi : \mathscr{LB}(\overline{X},\overline{Y}) \to \mathscr{LB}([X,X],[Y,Y])$, $\Phi T := T_{|X}$. Из $\mathscr{LB}$-интерполяционности тройки пространств $[X_0,X,X_1]$ относительно тройки $[Y_0,Y,Y_1]$ следует, что оператор Φ определен корректно.

Фиксируем произвольное q. Оператор Φ индуцирует оператор

$$\Phi_q : \lim_{p\in\mathbb{N}}\operatorname{proj}\ L(\overline{X^{(q)}},\overline{Y^{(p)}}) \to \mathscr{LB}([X,X],[Y,Y]).$$

Оператор Φ_q — замкнутый. Поэтому его непрерывность следует из теоремы о замкнутом графике [1, теорема 4.7.1].

Как и при доказательстве теоремы 2, необходимо доказать существование числа $q' \in \mathbb{N}$ такого, что оператор Φ_q непрерывно действует из $\lim\limits_{p\in\mathbb{N}}\operatorname{proj}\ L(\overline{X^{(q)}},\overline{Y^{(p)}})$ в $\lim\limits_{p\in\mathbb{N}}\operatorname{proj}\ L(X^{(q')},Y^{(p)})$. Но тогда

$$\begin{gathered}\forall\, q\ \exists\, q'\ \forall\, p\ \exists\, p' \exists\, C > 0 \forall\, T \in \mathscr{L}B(\overline{X},\overline{Y})\\ \|T : X \to Y\|_{p,q'} \leqslant C\|T : X \to Y\|_{p',q}.\end{gathered} \tag{6}$$

Искомое неравенство (5) следует из (6), если применить его к проекторам $T_{x,x'}$ (см. окончание доказательства теоремы 2).

5. Сформулируем условия, при выполнении которых неравенства (2) и (5) в теоремах 2 и 3 являются не только необходимыми, но и достаточными соответственно для $\mathscr{L}$-, $\mathscr{N}$- и $\mathscr{LB}$-, $\mathscr{NB}$-интерполяционности одного семейства пространств относительно другого.

Проще всего эти условия формулируются для когерентно ядерных и ограничено когерентно ядерных операторов.

Теорема 4. *Пусть X_1 — всюду плотное векторное подпространство в X. Если выполняется условие (2) или (5), то семейство $[X_0,X,X_1]$ соответственно $\mathscr{N}$- или $\mathscr{NB}$-интерполяционно относительно семейства $[Y_0,Y,Y_1]$.*

$\lhd$ Фиксируем произвольный оператор $T \in \mathscr{N}(\overline{X},\overline{Y})$. Для произвольного когерентно ядерного разложения этого оператора $Tx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x'_k(x)x_k$ из неравенства (5) следует, что

$$\begin{aligned} |Tx|_p &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|x'_k(x)||x_k|_p \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\|x'_k\|'_{\psi(p)}|x_k|_p\|x\|_{\psi(p)} \leqslant\\ &\leqslant C_p\sum_{k=1}^{+\infty}\max_{j=0,1;r\leqslant\psi(p)}\|x'_k\|'_{\varphi(r),j}|x_k|_{r,j}\|x\|_{\psi(p)} \leqslant\\ &\leqslant 2C_p\psi(p)\max_{j=0,1;r\leqslant\psi(p)}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\|x'_k\|'_{\varphi(r),j}|x_k|_{r,j}\right]\|x\|_{\psi(p)} \leqslant C'_p\|x\|_{\psi(p)}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\|x'\|'_{\psi(p)}\|x_k\|_p\leqslant 2C_p\psi(p)\max_{j=0,1;r\leqslant\psi(p)}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\|x'\|'_{\varphi(r),j}\|x_k\|_{r,j}\right]<+\infty \tag{8}$$

для всех $x\in X$ и некоторой константы $C'_p>0$ (не зависящей от x). Из неравенства (7) следует, что оператор $T_{|X}$ непрерывно действует из X в Y, а из неравенства (8) — что $T_{|X}\in\mathscr{N}([X,X],[Y,Y])$. Из произвольности оператора $T\in\mathscr{N}(\overline{X},\overline{Y})$, в свою очередь, следует, что тройка $[X_0,X,X_1]$ является $\mathscr{N}$-интерполяционной относительно $[Y_0,Y,Y_1]$.

То, что условие (5) является достаточным для $\mathscr{N}B$-интерполяционности одной тройки относительно другой, доказывается аналогично.

6. Условия, которые следует налагать на пространства, фигурирующие в теоремах 2 и 3 и которые гарантируют достаточность условия (2) для $\mathscr{L}$-интерполяционности (и условия (5) — для $\mathscr{L}B$-интерполяционности), формулируются в терминах функционала $F_s(\cdot,[X_0,X_1])$.

Для произвольных $s\in\mathbb{N}$ и ненулевого $x\in X_1$ положим

$$F_s(x,\overline{X}):=\inf\max_{j=0,1,r=1,\ldots,s}\frac{\|x\|_{r,j}\|x'\|'_{r,j}}{|x'(x)|}.$$

Здесь точная нижняя грань берется по множеству всех функционалов $x'\in X'_0$ таких, что $x'(x)\neq 0$. В частности, если $\overline{X}=[K_s(A^{(0)}),K_s(A^{(1)})]$, $s\in[1,+\infty)$ и (e_n) — последовательность ортов, то $F_s(e_n,\overline{X})=1$ для произвольных s, $n\in\mathbb{N}$. Действительно,

$$1\leqslant F_s(e_n,\overline{X})\leqslant\max_{j=0,1,r=1,\ldots,s}\frac{\|e_n\|_{r,j}\|e'_n\|'_{r,j}}{|e'_n(e_n)|}=1.$$

В терминах функционала $F_s(\cdot,\overline{X})$ можно из доказанных в теоремах 2, 3 необходимых условий $\mathscr{L}$- и $\mathscr{L}B$-интерполяционности одной тройки пространств относительно другой вывести условия, близкие к достаточным.

Лемма 1. *Пусть даны тройки* $[X_0,X,X_1]$ *и* $[Y_0,Y,Y_1]$ *пространств Фреше такие, что* $X_1\subset X\subset X_0$ *и* $Y_1\subset Y\subset Y_0$, *для которых выполняется неравенство* (2). *Тогда*

$$\begin{gathered}\forall\,\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists\,\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall\,p\in\mathbb{N}\ \ \exists\,C>0\,:\,\forall\,T\in L([X_0,X_1],[Y_0,Y_1])\ \forall\,x\in X_1,x\neq 0\\ \frac{|Tx|_p}{\|x\|_{\psi(p)}}\leqslant CF_{\psi(p)}(x,[X_0,X_1])\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|^{(\varphi)}_{\psi(p)}.\end{gathered}\tag{9}$$

$\lhd$ Фиксируем произвольный оператор $T\in L(\overline{X},\overline{Y})$. Из неравенства (2) следует, что для произвольных $x\in X_1$, $x'\in X'_0$, $x'(x)\neq 0$

$$\begin{gathered}\forall\,p\ \forall\,\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists\,\psi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\exists\,C\,:\,\forall\,x\in Y_1\ \forall\,x'\in X'_0\\ \frac{|Tx|_p}{\|x\|_{\psi(p)}}|x'(x)|\leqslant\frac{|Tx|_p}{\|x\|_{\psi(p)}}\|x\|_{\psi(p)}\|x'\|'_{\psi(p)}=|Tx|_p\|x'\|'_{\psi(p)}\leqslant\\ \leqslant C\max_{r\leqslant\psi(p),j=0,1}|Tx|_{r,j}\ \|y'\|'_{\varphi(r),j}=C\max_{r\leqslant\psi(p),j=0,1}\frac{|Tx|_{r,j}}{\|x\|_{\varphi(r),j}}\ \|x'\|'_{\varphi(r),j}\|x\|_{\varphi(r),j}\leqslant\\ \leqslant\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|^{(\varphi)}_{\psi(p)}\max_{r\leqslant\psi(p),j=0,1}\ \|x'\|'_{\varphi(r),j}\|x\|_{\varphi(r),j}.\end{gathered}\tag{10}$$

Разделив правую и левую части неравенства (12) на $|x'(x)|\neq 0$ и переходя в полученном выражении к точной нижней грани по всем ненулевым $x'\in X'_0$, получаем искомое неравенство (9):

$$\frac{|Tx|_p}{\|x\|_{\psi(p)}} \leqslant \inf \max_{j=0,1;r\leqslant\psi(p)} \frac{\|x'\|'_{r,j}\|x\|_{r,j}}{|x'(x)|}\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|^{(\varphi)}_{\psi(p)} = CF_{\psi(p)}(x,\overline{X})\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|^{(\varphi)}_{\psi(p)}. \ \rhd$$

Лемма 2. *Пусть даны тройки пространств Фреше* $[X_0,X,X_1]$ *и* $[Y_0,Y,Y_1]$ *такие, что* $X_1\subset X\subset X_0$ *и* $Y_1\subset Y\subset Y_0$*, для которых выполняется неравенство* (5)*. Тогда*

$$\begin{gathered}\forall\, r\in\mathbb{N}\ \exists\, q=q(r)\in\mathbb{N}\ \forall\, p\in\mathbb{N}\ \exists\, s=s(r,p)\in\mathbb{N}:\exists\, C>0\\ \forall\, T\in\mathscr{B}([X_0,X_1],[Y_0,Y_1])\ \forall\, x\in X_1, x\neq 0\\ \frac{|Tx|_p}{\|x\|_q}\leqslant CF_r(x,\overline{X})\|T:\overline{X}\to\overline{Y}\|_{r,s}.\end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 и следует из определения функционала $F_s(\cdot,\overline{X})$.

7. Сформулируем условия (см. теорему 4), при которых из (9) и (11) следует соответственно $\mathscr{L}$- и $\mathscr{LB}$-интерполяционность $[X_0,X,X_1]$ относительно $[Y_0,Y,Y_1]$. Эти условия сформулированы в терминах s-абсолютно представляющих систем. Впервые понятие абсолютно представляющей (точнее, 1-абсолютно представляющей) системы было введено Ю. Ф. Коробейником [16] и А. А. Талаляном [7, 8] (обзор основных свойств представляющих последовательностей см., например, в [17]).

Определение 3. Пусть $s\geqslant 1$. Последовательность (f_n) элементов пространства Фреше X будем называть *s-абсолютно представляющей последовательностью*, если для любого $x\in X$ существует числовая последовательность (α_n) такая, что

1° ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n f_n$ в X сходится к x,

2° $\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|^s\|f_n\|_p^s<+\infty$ для произвольного p.

В частности, 1-абсолютно представляющие последовательности называют абсолютно представляющими последовательностями.

Если в определении 3 разложение единственно для произвольного элемента пространства, то последовательность (f_n) называют абсолютным базисом в данном пространстве Фреше. Примером s-абсолютного базиса служит базис ортов $e=(e_n)$ в пространстве Кёте $K_s(A)$.

Последовательность (f_n) называют s-абсолютно представляющей системой в тройке пространств Фреше $[X_0,X_1,X_2]$, $X_2\subset X_1\subset X_0$, если она будет s-абсолютно представляющей системой в каждом пространстве этого семейства и последовательность (α_n) (для которой выполняются условия 1° и 2°) может быть выбрана не зависящей от пространства X_j, $j=0,1,2$, для произвольного $x\in X_2$.

Теорема 5. *Предположим, что для пространств Фреше* X_0, X, X_1 *и* Y_0, Y, Y_1 *выполняются следующие условия:*

1) *вложение* $X_1\subset X$ *— плотное;*

2) *выполняется условие* (9) (*соответственно, условие* (11));

3) *существует числовая последовательность* $(L(p))$ *такая, что из множества* $L:=\{x\in X:\forall\, p\ F_p(x;[X_0,X_1])\leqslant L(p)\}$ *можно выбрать последовательность* (f_n)*, которая будет* s*-абсолютно представляющей в* X_0, X *и* X_1.

Тогда семейство $[X_0,X,X_1]$ $\mathscr{L}$- (*соответственно,* $\mathscr{LB}$-) *интерполяционно относительно семейства* $[Y_0,Y,Y_1]$.

$\lhd$ Покажем, что при сделанных в теореме предположениях из условия (2) следует, что $[X_0,X,X_1]$ будет $\mathscr{L}$-интерполяционным относительно $[Y_0,Y,Y_1]$ (случай $\mathscr{LB}$-интерполяционности рассматривается аналогично).

Положим $\|x\|_p^* := \inf \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_p^s\right)^{1/s}$ для любого $x \in X$, где точная нижняя грань берется по множеству всех разложений $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n$, для которых выполняются условия 1° и 2° из определения 3. Известно, что набор норм $(\|\cdot\|_p^*)$ задает в X исходную топологию. В частности, отсюда следует, что

$$\forall\, s\ \exists\, r = r(s)\ \exists\, R : \forall\, x \in X\ \ \|x\|_s^* \leqslant R\|x\|_r.$$

Фиксируем произвольные $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$ и $x \in X$. При сделанных предположениях найдется числовая последовательность (α_n) такая, что $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n$ (ряд сходится в X_j) и $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_{p,j}^s < +\infty$, $j = 0, 1$. Тогда $Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T f_n$ (так как оператор T непрерывно действует из X_j в Y_j) и

$$\begin{gathered} |Tx|_p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^s |Tf_n|_p^s\right)^{1/s} \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^s F_{\psi(p)}^s(f_n, \overline{X}) \|T : \overline{X} \to \overline{Y}\|_{\varphi(\psi(p)),\psi(p)} \|f_n\|_{\psi(p)}^s\right)^{1/s} \leqslant \\ \leqslant L(\psi(p)) \|T : \overline{X} \to \overline{Y}\|_{\varphi(\psi(p)),\psi(p)} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_{\psi(p)}^s\right)^{1/s}. \end{gathered} \tag{12}$$

Если перейти в неравенстве (12) к точной нижней грани по множеству всех разложений x (для которых выполняются условия 1° и 2° из определения s-абсолютно представляющей последовательности), получаем следующее неравенство:

$$|Tx|_p \leqslant L(\psi(p)) \|T : \overline{X} \to \overline{Y}\|_{\varphi(\psi(p)),\psi(p)} \|x\|_{\psi(p)}^* \leqslant L(\psi(p)) R\, \|T : \overline{X} \to \overline{Y}\|_{\varphi(\psi(p)),\psi(p)} \|x\|_{r(\psi(p))}$$

для произвольного $x \in X_1$. Из того, что X_1 есть всюду плотное подмножество в X и из произвольности $p \in \mathbb{N}$ следует, что оператор $T_{|X}$ непрерывно действует из X в Y.

Следствие 1. *Предположим, что для двух троек пространств* $[Y_0, Y, Y_1]$ *и* $[K_p(A^{(0)}), K_p(A), K_p(A^{(1)})]$, $1 \leqslant p < +\infty$ *выполняется условие* (2) (*соответственно,* (5)). *Тогда* $[Y_0, Y, Y_1]$ *будет* $\mathscr{L}$*-интерполяционно* (*соответственно,* $\mathscr{L}\mathscr{B}$*-интерполяционно*) *относительно тройки* $[K_p(A^{(0)}), K_p(A), K_p(A^{(1)})]$.

◁ Искомое утверждение следует из теоремы 5 и того факта, что для последовательности ортов выполняется условие 3) теоремы 5. ▷

Литература

1. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
2. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2003.—143 с.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. 1. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука.—1978.—400 с.
6. *Крейн С. Г., Семёнов Е. М., Брудный Ю. А.* Интерполяция линейных операторов // Мат. анализ.—М.: ВИНИТИ.—1986.—Т. 24.—С. 3–164.
7. *Талалян А. А.* О существовании нуль-рядов по некоторым системам функций // Мат. заметки.—1969.—Т. 5, вып. 1.—С. 39–51.

8. *Талалян А. А.* Представление функций классов $L_p(0,1)$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами // Acta Acad. Sci. Hung.—1968.—V. 21, № 1/2.—P. 1–9.
9. *Трибель Х.* Теория интерполяции, Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
10. *Bonet J., Galbis A.* The identity $L(E,F) = LB(E,F)$, tensor products and inductive limits // Note Mat.—1989.—V. 9.—P. 195–216.
11. *Chersi F.* Ricerche per una teoria generale dell'interpolazione tra spazi linear topologici / Reud. Semin. //Univ. Padova.—1964.—V. 32, № 2.—P. 305–343.
12. *Djakov P. B., Ramanujan M. S.* Bounded and Unbounded operators between Köthe spaces // Studia Math.—2002.—V. 152, № 1.—P. 11–31.
13. *Girardeau J. P.* Sur l'interpolation entre un espace localement convexe et son dual // Rev. Fac. Scien. Univ. Lisboa.—1964/1965.—A 11, № 1.—P. 165–186.
14. *Vogt D.* Fréchetträume, zwischen denen jede lineare stetige Abbildung beschränkt ist // J. Reine Angew. Math.—1983.—V. 345.—P. 182–200.
15. *Zachariuta V. P.* On isomorphism of cartesian products of local convex spaces // Studia Math.—1973.—V. 46.—P. 201–221.
16. *Крейн С. Г., Кучмент П. А.* Об одном подходе к задаче интерполяции линейных операторов // Тр. НИИ мат. Воронежского ун-та.—1971.—Вып. 14.—С. 54–60.
17. *Овчинников В. И.* Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функц. анализ и его прил.—1976.—Т. 10, № 4.—С. 45–54.
18. *Овчинников В. И.* Об оценках интерполяционных орбит // Мат. сб.—1981.—Т. 115, № 4.—С. 642–652.

Статья поступила 22 декабря 2006 г.

Шубарин Михаил Александрович, к. ф.-м. н.
Южный Федеральный Университет,
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: `mas@math.rsu.ru`