Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **517.946**

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. В. Дзарахохов

Доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи типа Бицадзе — Самарского для смешанного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Пусть Ω — односвязная смешанная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная отрезками $AA_0,\ A_0B_0,\ B_0B$ прямых $x=0,\ y=y_0,\ x=l$ соответственно и характеристиками $AC:\ x+y=0,\quad BC:\ x-y=l$ уравнения

$$0=\begin{cases} U_{xxx}-U_y-\lambda_1 U, & y>0,\\ U_{xxx}-U_{yyx}, & y<0; \end{cases} \tag{1}$$

$\Omega_1=\Omega\cap(y>0),\ \Omega_2=\Omega\cap(y<0)$. Через I обозначим интервал $0<x<l$ прямой $y=0$.

Задача 1. Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{(3,1)}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{(3,2)}_{x,y}(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1\cup\Omega_2$ и краевым условиям

$$U(0,y)=\varphi_1(y),\quad U_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant y_0, \tag{2}$$

$$\left(\alpha_1(y)\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_1(y)U(x,y)\right)\bigg|_{x=x_0}=\left(\alpha_2(y)\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_2(y)U(x,y)\right)\bigg|_{x=l}+\delta(y), \tag{3}$$

$$U|_{AC}=\psi_1(x),\quad \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{AC}=\psi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}, \tag{4}$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\delta(y),\psi_1(x),\psi_2(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $x_0\in I$, причем $\beta_2(y)\neq 0$.

Общее решение уравнения (1) при $y<0$ задается формулой

$$U(x,y)=F_1(x+y)+F_2(x-y)-\omega(y), \tag{5}$$

где $F_1(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I),\ F_2(x)\in C(\overline{I})\cap C^2(I)$.

Удовлетворяя (5) краевым условиям (4), получим

$$U(x,y)=F_1(x+y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{x-y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-2y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-(x+y)F_1'(0)-F_1(0). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по x и y и вычитая из первого соотношения второе, а затем переходя к пределу при $y \to 0-$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию $y = 0$ в виде

$$\tau'(x) - \nu(x) = \theta(x), \tag{7}$$

где

$$\tau(x) = \lim_{y \to 0-} U(x,y), \quad \nu(x) = \lim_{y \to 0-} U_y(x,y),$$

$$\Theta(x) = \psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_2\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2}\psi_2(0).$$

Из уравнения (1) при $y > 0$ следует, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ будут связаны следующим соотношением, принесенным из параболической части Ω_1 на линию $y = 0$

$$\tau'''(x) - \nu(x) - \lambda_1\tau(x) = 0. \tag{8}$$

Исключая $\nu(x)$ из (7) и (8) и учитывая граничные условия (2) и (3) при $y \to 0+$, получим нелокальную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) - \tau'(x) - \lambda_1\tau(x) = -\theta(x), \tag{9}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \tag{10}$$

$$\big(\alpha_1(0)\tau'(x) + \beta_1(0)\tau(x)\big)\big|_{x=x_0} = \big(\alpha_2(0)\tau'(x) + \beta_2(0)\tau(x)\big)\big|_{x=l} + \delta(0). \tag{11}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению ($\theta = 0$) (9), имеет вид

$$k^3 - k - \lambda_1 = 0. \tag{12}$$

Введем обозначения $s = \frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{1}{27}$. Известно [1], что уравнение (12) имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня, если $s > 0$. Оно имеет три различных действительных корня, если $s < 0$. При $s = 0$ все три корня уравнения (12) действительны, причем два из них равны. Рассмотрим случай, когда $s > 0$. В этом случае $k_1 = u_1 + v_1$, $k_2 = -\frac{k_1}{2} + ih$, $k_3 = -\frac{k_1}{2} - ih$, где через u_1, v_1 обозначена какая-нибудь пара значений кубических радикалов, причем $h = \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)$.

$$u = \sqrt{3}\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{s}, \quad v = \sqrt{3}\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{s},$$

удовлетворяющих соотношению $uv = \frac{1}{3}$.

Общее решение неоднородного уравнения (9) будем искать в таком же виде, как и общее решение соответствующего однородного уравнения ($\theta = 0$) (9). Заменим произвольные постоянные некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями от x, т. е. положим

$$\tau(x) = C_1(x)\exp(k_1x) + (C_2(x)\cos hx + C_3(x)\sin hx)\exp\left(-\frac{k_1}{2}\right)x. \tag{13}$$

Выберем функции $C_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, так, чтобы $\tau(x)$, определяемое формулой (13), было общим решением уравнения (9). На основании общей теории [2], для определения $C_i(x)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 + C_3'(x)z_3 = 0, \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' + C_3'(x)z_3' = 0, \\ C_1'(x)z_1'' + C_2'(x)z_2'' + C_3'(x)z_3'' = -\theta(x), \end{cases} \tag{14}$$

где $z_1 = \exp(k_1 x),\ z_2 = \cos hx \exp(-\frac{k_1}{2})x,\ z_3 = \sin hx \exp(-\frac{k_1}{2})x$ фундаментальная система решений однородного ($\theta = 0$) уравнения (9).

Система (14) есть алгебраическая линейная неоднородная система относительно $C_i'(x)$. Разрешая эту систему относительно $C_i'(x)$, находим

$$C_i'(x) = -\frac{\big(W_{ni}(x)\theta(x)\big)}{W(x)}, \tag{15}$$

где $W_{ni}(x)$ — алгебраическое дополнение элементов n-й строки определителя Вронского.

$$\begin{aligned} W(x) = \Bigg[& \left(-\frac{k_1}{2}\cos hx - h\sin hx\right)\left(\left(\frac{k_1^2}{4} - h^2\right)\sin hx - k_1 h\cos hx\right) \\ & - k_1\left(\left(\frac{k_1^2}{4} - h^2\right)\cos hx + k_1 h\sin hx\right)\Bigg]\exp\left(\frac{3}{4}k_1 x\right) \\ & + \cos hx\left[\left(h\cos hx - \frac{k_1}{2}\sin hx\right)k_1^2 - k_1\left(\left(\frac{k_1^2}{4} - h^2\right)\sin hx - k_1 h\cos hx\right)\right] \\ & + \sin hx\left[\left(\frac{k_1^2}{4} - h^2\right)\cos hx + k_1 h\sin hx - k_1\left(-\frac{k_1}{2}\cos hx - h\sin hx\right)\right] \neq 0, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} & W_{31}(x) = -k_1 h\exp(-k_1 x), \\ & W_{32}(x) = (h\cos hx - \frac{3}{2}k_1\sin hx)\exp(\frac{k_1}{2}x), \\ & W_{33}(x) = -(\frac{3}{2}k_1\cos hx - h\sin hx)\exp(\frac{k_1}{2}x). \end{aligned}$$

Интегрируя равенство (15) от 0 до x, получим

$$C_i(x) = -\int_0^x \frac{W_{ni}(t)\theta(t)\,dt}{W(t)} + \gamma_i,\ i = 1,2,3, \tag{16}$$

где γ_i — произвольные постоянные. Подставляя (16) в (13), находим

$$\tau(x) = -\sum_{i=1}^{3} z_i\int_0^x \frac{W_{ni}(t)\theta(t)\,dt}{W(t)} + \sum_{i=1}^{3}\gamma_i z_i. \tag{17}$$

Удовлетворяя (17) граничным условиям (10), (11), получим алгебраическую линейную неоднородную систему относительно $\gamma_i,\ i = 1,2,3$, с определителем

$$\Delta = (\Theta_1 - C\Theta_2)h - \frac{3}{2}k_1\Theta_3,$$

где
$$\Theta_1 = \big(\alpha_1(0)k_1 + \beta_1(0)\big)\exp(k_1 x_0) - \big(\alpha_2(0)k_1 + \beta_2(0)\big)\exp(k_1 l),$$
$$\Theta_2 = \beta_1(0)\cos hx_0 - \alpha_1(0)\left(h\sin hx_0 + \frac{k_1}{2}\cos hx_0\right)\exp\left(-\frac{k_1}{2}x_0\right)$$
$$+\,\alpha_2(0)\left(\left(h\sin hl + \frac{k_1}{2}\cos hl\right) - \beta_2(0)\cos hl\right)\exp\left(-\frac{k_1}{2}l\right),$$
$$\Theta_3 = \left(\alpha_1(0)\left(h\cos hx_0 - \frac{k_1}{2}\sin hx_0\right) + \beta_1(0)\sin hx_0\right)\exp\left(-\frac{k_1}{2}x_0\right)$$
$$-\left(\alpha_2(0)\left(h\cos hl - \frac{k_1}{2}\sin hl\right) + \beta_2(0)\sin hl\right)\exp\left(-\frac{k_1}{2}l\right).$$

Разрешая эту систему относительно γ_i, находим

$$\gamma_1 = \Delta^{-1}\left((\delta_1 - \varphi_1(0)\Theta_2) - \varphi_2(0) + n'(0) - \frac{k_1}{2}\varphi_1(0)\right),$$
$$\gamma_2 = \Delta^{-1}\left((\varphi_1(0) - \delta_1)h + (\varphi_2(0) + n'(0) - \varphi_1(0))\Theta_3\right),$$
$$\gamma_3 = \Delta^{-1}\left(\left(-\frac{3}{2}\delta_1 + \varphi_1(0)\left(\Theta_2 + \frac{\Theta_1}{2}\right)\right)\Theta_1 + (\Theta_1 - \Theta_2)(\varphi_2(0) - n'(0))\right),$$

если $\Delta \neq 0$.

После определения $\tau(x)$ в области Ω_1 приходим к задаче (1), (2), $u(x,0) = \tau(x)$, $u(l,y) = \varphi_3(y)$. Решение этой задачи дается формулой (4).

$$U(x,y) = v(x,y) - \lambda\int_0^l d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)U(\xi,\eta)\,d\eta, \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\pi}, \tag{18}$$

где

$$(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta\right.$$
$$\left. - \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;l,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta + \int_0^l G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi\right),$$

$G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина рассматриваемой задачи для уравнения $U_{xxx} - U_y = 0$. Метод построения и ее основные свойства даются в работе [4]. Решение интегрального уравнения (18) можно выписать через резольвенту $R(x,y;\xi,\eta)$ ядра $\lambda G(x,y;\xi,\eta)$

$$U(x,y) = v(x,y) + \int_0^y d\eta\int_0^l R(x,y;\xi,\eta)v(\xi,\eta)\,d\xi. \tag{19}$$

Реализуя краевое условие (3), получим интегральное уравнение относительно функции $\varphi_3(y)$

$$\beta_2(y)\varphi_3(y) + \int_0^y M(x,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta = g(y), \tag{20}$$

где ядро $M(x,\eta)$ и правая часть $g(y)$ уравнения (20) выражаются через функцию Грина G, резольвенту R и заданные функции (3).

По условию $\beta_2(y) \neq 0$. Таким образом, уравнение (20) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе C $(0 \leqslant y \leqslant y_0)$.

После определения функции $\varphi_3(y)$, решение задачи 1 в области Ω_1 находим по формуле (19), а в области Ω_2 приходим к задаче (1), (4), $u(x,0)=\tau(x)$, единственное решение которой дается формулой

$$U(x,y) = \tau(x+y) - \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{x-y}^{x+y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{2y} \psi_2(t)\, dt,$$

где $\tau(x)$ определяется из (17).

Литература

1. *Фадеев Д. К.* Лекции по алгебре.—М.: Наука, 1984.—415 с.
2. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Высшая школа, 1963.—545 с.
3. *Елеев В. А., Макоева М. Х.* О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанных уравнений гиперболо-параболического типа второго и третьего порядка // Известия КБНУ РАН.—2002, № 1 (8).—С. 9–17.
4. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: Фан, 1979.—238 с.

Статья поступила 6 сентября 2004 г.

Дзарахохов Азамат Валерьянович
г. Владикавказ, Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова